

Raphael Rocha da Silva

**Projeto de controladores com realimentação de estado
estimado via desigualdades matriciais lineares**

Campo Grande, MS, Brasil

Outubro de 2016

Raphael Rocha da Silva

**Projeto de controladores com realimentação de estado estimado via
desigualdades matriciais lineares**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito para a colação do grau de bacharel em Engenharia de Computação.

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

Orientador: Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Campo Grande, MS, Brasil

Outubro de 2016

Este texto foi produzido em LaTeX, com o pdfTeX versão 3.14159265-2.6-1.40.16 (TeX Live 2015/Debian) e uso dos pacotes abnTeX2, TikZ e muitos outros.

Última revisão: 4/11/2016

Versão obtida em raphael.neocities.org

Raphael Rocha da Silva

Projeto de controladores com realimentação de estado estimado via desigualdades matriciais lineares/ Raphael Rocha da Silva. – Campo Grande, MS, Brasil, Outubro de 2016-68 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Monografia (Graduação) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação, Outubro de 2016.

1. Engenharia de Controle e Automação. 2. Projeto de controladores e observadores. 2. Desigualdade matricial linear. I. Victor Yoshimura. II. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. III. Faculdade de Computação. IV. Bacharel em Engenharia de Computação.

Raphael Rocha da Silva

Projeto de controladores com realimentação de estado estimado via desigualdades matriciais lineares

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito para a colação do grau de bacharel em Engenharia de Computação.

Trabalho aprovado.

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura
Orientador

Profa. Dra. Edna Ayako Hoshino
Avaliadora

Prof. Dr. Ricardo Ribeiro dos Santos
Avaliador

Campo Grande, MS, Brasil
22 de setembro de 2016

Agradecimentos

Ao professor doutor Victor Yoshimura, de quem partiu a ideia deste projeto e que me direcionou durante a pesquisa;

À professora doutora Edna Hoshino e ao professor doutor Ricardo dos Santos, que fizeram uma cuidadosa leitura e contribuíram com sugestões para este texto;

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, onde este trabalho foi desenvolvido, que, entre outras coisas, disponibilizou vários dos materiais bibliográficos utilizados; e ao povo brasileiro, que mantém a Universidade;

Aos amigos Guilherme Defalque, Lucas Tsutsui, Leonardo Cessel, Paulo Soken, Eliton Perin e Osbourne Smith, que prontamente me atenderam e ajudaram nas etapas finais do desenvolvimento deste trabalho;

A minha família, que sempre me apoia e que contribuiu comigo de várias maneiras enquanto eu me dedicava a este projeto;

Aos amigos, pelo constante incentivo;

Aos autores do material bibliográfico utilizado neste trabalho;

Aos desenvolvedores das ferramentas computacionais usadas neste trabalho;

A todos aqueles que dedicam tempo compartilhando conhecimento e oferecendo suporte técnico na Internet, vários dos quais foram de grande ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Este trabalho mostra um método de projeto de controladores para sistemas lineares contínuos invariantes no tempo com realimentação de estado estimado por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Para estimar estados, usa-se observadores de Luenberger (também chamados simplesmente de “observadores” ou “estimadores”), cuja função é calcular as variáveis que não podem ser medidas por meio da observação das variáveis a que se tem acesso. O método é estendido para a alocação de polos em lugares específicos do plano complexo para se alcançar o que é chamado de \mathcal{D} -estabilidade. Essa alocação permitirá limitar a parte real, o módulo e o argumento dos polos, cujas consequências são limitar o tempo de acomodação, o amortecimento e a frequência natural do sistema. Serão omitidas as técnicas usadas para escolher regiões adequadas para os polos, supondo-se que essas regiões sejam previamente conhecidas. Também são mostrados casos que envolvem incertezas politópicas na planta. Serão projetados para eles controladores robustos com realimentação de estado real. Serão justificados os motivos que impedem o uso de estados estimados (usando as técnicas abordadas) quando existe incerteza. Este trabalho inclui a teoria e os procedimentos necessários para se transformar problemas de projeto de controle em problemas de desigualdades matriciais, e as desigualdades matriciais são resolvidas com o uso de ferramentas computacionais. A teoria mostrada é ilustrada com o exemplo de um motor de corrente contínua, onde parte-se da modelagem e aborda-se os casos discutidos ao longo do texto para se projetar controladores e observadores com diferentes objetivos. Após a obtenção dos resultados, o sistema é simulado e seu comportamento é analisado.

Palavras-chaves: Engenharia de Controle e Automação, projeto de controladores, observadores de estado, desigualdades matriciais lineares

Abstract

This work presents a method to design controllers with estimated state feedback for linear, time-invariant, continuous-time systems via linear matrix inequalities (LMIs). Luenberger observers (also known simply as “observers” or “estimators”) are used to estimate the states. These observers’ role is to calculate the variables that cannot be measured through the observation of the known variables. The method is extended to cases where it is important to place systems’ poles in specific locations of the complex plane and reach what is called a \mathcal{D} -stability. Such placement allows the real part, the modulus, and the argument of the poles to be limited, which in turn limits the system’s settling time, damping and natural frequency. Procedures used to choose appropriate regions for the poles will be omitted. Instead, it will be assumed that these regions are previously known. This work also shows cases involving polytopic uncertainties on the plant, which are resolved with the use of robust controllers with state feedback. Some discussion will be made about why the techniques used do not allow the usage of estimated states when there are uncertainties. This work includes all the theoretical concepts and procedures required to turn controller design problems into linear matrix inequalities problems. The matrix inequalities are then solved by the use of computer tools. The theory shown is illustrated with the example of a direct current motor, starting from the modeling and approaching the cases discussed in the text in order to design controllers and observers having different goals. After obtaining the results, the system is simulated and its behavior is analysed.

Keywords: Control Engineering, controller design, state observer, linear matrix inequalities

Resumen

Este trabajo presenta un método de diseño de controladores con realimentación de estado estimado para sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo a través de desigualdades matriciales lineales (LMIs). Se utilizan observadores de Luenberger (también conocidos simplemente como “observadores” o “estimadores”) para estimar los estados. La función de estos observadores es calcular las variables que no pueden ser medidas a través de la observación de las variables que se conoce. El método se generaliza para los casos en que se desea colocar los polos del sistema en lugares específicos del plano complejo y llegar a lo que se llama \mathcal{D} -estabilidad. Tal asignación permite limitar la parte real, el módulo y el argumento de los polos, cuyas consecuencias son limitar el tiempo de establecimiento, amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema. Los procedimientos utilizados para elegir las regiones apropiadas para los polos serán omitidos. En vez de eso, se supondrá que estas regiones son conocidas previamente. También se muestran los casos que contienen incertidumbres politópicas en la planta. Serán diseñados controladores robustos con realimentación de estado real para ellos. Se justificará las razones que impiden el uso de estados estimados (al menos con las técnicas de este trabajo) cuando existe incertidumbre. Este trabajo incluye todos los conceptos teóricos y procedimientos necesarios para convertir problemas de control en problemas de desigualdades matriciales lineales. Las desigualdades matriciales son resueltas con herramientas computacionales. La teoría presentada es ilustrada con un ejemplo de un motor de corriente continua, empezando con la modelización de él y siguiendo hacia el abordaje de los casos discutidos en el texto para el diseño de controladores y observadores con diferentes objetivos. Después de una obtención de resultados, el sistema es simulado y su comportamiento es analizado.

Palabras clave: Ingeniería de Control, diseño de controlador, observador de estado, desigualdades matriciales lineales

Lista de abreviaturas e siglas

LMI desigualdade matricial linear

Lista de símbolos

$M^{(i,j)}$	a entrada da linha i e coluna j da matriz M
x_i	a entrada da posição i do vetor x
M'	a transposta da matriz M
M^{-1}	a inversa da matriz M
$M \succ 0$	a matriz M é positiva definida
I	uma matriz identidade de tamanho apropriado
0	uma matriz nula de tamanho apropriado (ou o próprio número zero)
$\det(M)$	o determinante da matriz M
$\text{adj}(M)$	a matriz adjunta da matriz M
$\mathbb{R}^{l \times c}$	o espaço formado pelas matrizes reais que possuem l linhas e c colunas
$\ v\ $	o módulo do vetor v
t	variável independente que mede o tempo
s	variável complexa independente do domínio da frequência
\hat{x}	a estimação do estado x
\dot{x}	a derivada de ordem 1 de x em relação ao tempo
$\frac{d}{dt}f$	a derivada de ordem 1 de f em relação a t
$\frac{d^n}{dt^n}f$	a derivada de ordem n de f em relação a t
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	a transformada de Laplace da função $f(t)$
$z = a + bj$	o número complexo $a + b\sqrt{-1}$
$\arg(z)$	o argumento do número complexo z
$\ z\ $	a norma do número complexo z
\bar{z}	o conjugado do número complexo z
$ a $	o módulo do número real a
$a \rightarrow b$	a tende a b
$a \mapsto b$	a operação que mapeia a para b
$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$	f é uma função cujo conjunto de partida é \mathbb{A} e o contradomínio é \mathbb{B}

Sumário

	Introdução	12
	Convenções	16
I	REFERENCIAIS TEÓRICOS	17
1	ENGENHARIA DE CONTROLE	18
1.1	Estabilidade	18
1.2	Equações do espaço de estados	18
1.3	Modelagem de sistemas	18
1.4	Função de transferência	20
1.5	Realimentação de estado	21
2	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	22
3	CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE	24
3.1	Estabilidade assintótica	24
3.2	\mathcal{D}-estabilidade	26
3.2.1	Regiões LMI	27
3.2.1.1	O semiplano $a < -\sigma$	28
3.2.1.2	O círculo com centro em $(0,0)$ e raio r	28
3.2.1.3	A seção cônica com centro em $(0,0)$ e ângulo 2θ simétrica em torno do eixo real	28
3.3	Estabilidade robusta	29
4	OBSERVABILIDADE	31
4.1	Princípio da Separação	33
II	APLICAÇÕES	36
5	PROJETO DE CONTROLADORES	37
5.1	Estabilidade assintótica	37
5.1.1	Projeto do controlador	37
5.1.2	Projeto do observador	38
5.2	\mathcal{D}-estabilidade	38
5.2.1	Projeto do controlador	38
5.2.2	Projeto do observador	39
5.3	Estabilidade robusta	39
5.3.1	Projeto do controlador	39
5.3.2	Nota sobre projeto de observador	40

6	EXEMPLO	41
6.1	Modelagem do sistema	41
6.2	Projeto de controlador e observador	43
6.2.1	Estabilidade assintótica	44
6.2.2	\mathcal{D} -estabilidade	46
6.2.3	Estabilidade robusta	49
III	COMENTÁRIOS	52
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
7.1	Uso do método	53
7.2	Possível implementação prática	54
7.3	Projeto robusto	54
7.4	Sugestões de pesquisa	55
7.5	Trabalhos relacionados	55
	APÊNDICES	56
	APÊNDICE A – FERRAMENTAS UTILIZADAS	57
A.1	LMISol	57
A.2	Scilab	58
	APÊNDICE B – ALGORITMOS PARA RESOLUÇÃO DE LMIS	60
	APÊNDICE C – CONCEITOS BÁSICOS	63
C.1	Álgebra matricial	63
C.2	Engenharia de Controle	64
	REFERÊNCIAS	66
	Índice	68

Introdução

Fazer o controle automático com realimentação significa projetar um mecanismo capaz de monitorar constantemente a situação de um sistema e, com base nesse monitoramento, tomar atitudes corretivas que evitem que o sistema se distancie muito de seu comportamento desejado. Os sistemas físicos estão sempre sujeitos a sofrer ações imprevisíveis (perturbações) e usar controle com realimentação é muito importante para atenuá-las. Também existem sistemas que, mesmo sem perturbações, têm um comportamento que extrapola os limites desejáveis (sistemas instáveis). Um reservatório que estiver sendo enchido com água pode transbordar se nenhuma ação for realizada para que a entrada de água seja desligada quando ele estiver perto de encher. Essa ação pode ser automática se desempenhada por um regulador de válvula flutuante, por exemplo.

Válvulas flutuantes são um tipo de controle automático com realimentação que tem sido utilizado desde a Antiguidade: dois mil anos atrás romanos e gregos as usavam, principalmente para controlar o nível de água em tanques e em relógios d'água. Mas, até onde se tem registro, o uso de controladores automáticos ficou limitado a esse tipo de dispositivo até o século 16, quando surgiu o primeiro regulador de temperatura na Europa. Muitos mecanismos de controle foram inventados nos três séculos seguintes. Contudo, eles eram ainda fabricados sem que houvesse um claro entendimento ou estudo cauteloso sobre seus funcionamentos (BENNETT, 1996; BISSELL, 2009).

A Engenharia de Controle começa a se estabelecer como ciência no começo do século 20, quando pesquisadores passaram a ter mais zelo para registrar seus experimentos e estudar resultados anteriormente obtidos por outros, além de passarem a pesquisar mais cuidadosamente os motivos que levavam determinados projetos a funcionar ou deixar de funcionar e não mais apenas se preocuparem em inventar algo que fosse útil para um caso específico de interesse (BENNETT, 1996).

Circuitos contendo realimentação passaram a ser cuidadosamente estudados a partir do final da década de 1920. À época, embora os engenheiros tivessem conhecimento sobre como projetar controladores com realimentação para diversas situações, muito pouco se sabia sobre a dinâmica por trás do funcionamento desses dispositivos. A maior parte da teoria e dos métodos matemáticos envolvendo controle com realimentação de estado surgiu entre as décadas de 1930 e 1950 e são úteis ainda hoje (BISSELL, 2009).

Um controle com realimentação de estado precisa medir as variáveis de um sistema para tomar decisões com base em seu estado atual. Caso não seja possível ou desejável medir uma ou mais dessas variáveis, esse método pode se transformar no problema de estimar o estado em que o sistema se encontra em um dado momento através da observação de apenas uma parte do sistema. Então, o controle pode ser feito da mesma forma, usando-se as variáveis estimadas em vez de medir as variáveis reais.

Deixar de fazer a medição de algumas variáveis pode ser conveniente por alguns motivos:

- O local onde o sensor deveria ser colocado para a medição pode não ser acessível;
- Podem não existir instrumentos com performance satisfatória para medir uma variável específica, seja por limitações de acurácia, resolução, faixa de medição, sensibilidade e outras características dos sensores que tipicamente causam erros de medição;
- Os sensores disponíveis para uso podem ser muito caros ou ter um tempo de vida muito curto, então estimar os estados em vez de usar sensores tornaria o projeto mais barato ou mais resistente.

A proposta de usar observadores foi publicada pela primeira vez pelo cientista matemático americano David Luenberger em (LUENBERGER, 1964) e aperfeiçoada em (LUENBERGER, 1966). Essas duas publicações se limitavam a observadores para sistemas contínuos e invariantes no tempo. Dentro dos cinco anos que as sucederam, muitos outros pesquisadores estenderam o uso de observadores para outros tipos de sistema (LUENBERGER, 1971).

Como o propósito inicial de um observador é estimar variáveis que são usadas para fazer controle, pode ser natural enxergar o observador como parte integrante do controlador. Assim, é normal que o projeto de um observador faça parte do projeto do controlador. Com isso, surgem questionamentos sobre como um observador pode afetar o comportamento de um controlador, ou vice-versa.

Este trabalho vai mostrar que o controlador e o observador de um sistema podem ser projetados separadamente e que o projeto de um não interfere nas características do outro, sendo os dois dependentes apenas das características do sistema original. Isso será feito analisando-se o comportamento do sistema resultante após a inserção de um controlador e um observador ao sistema que se quer controlar. Essa análise será feita sob um projeto genérico, onde o controlador e o observador são ainda desconhecidos. Então, serão encontradas restrições que devem ser respeitadas para que o controlador e o observador funcionem.

Essas restrições serão formuladas com desigualdades matriciais lineares (comumente abreviadas “LMI”, do inglês *linear matrices inequalities*), cuja resolução permitirá efetivamente encontrar um controlador e um observador que funcionem para o sistema. Esse método permite que as incógnitas do controlador e do observador sejam encontradas facilmente com o uso de ferramentas computacionais, sobrando ao projetista o trabalho de formular as desigualdades adequadamente.

O problema de verificar o comportamento de um sistema por meio de desigualdades matriciais lineares teve como precursor a tese de doutorado do matemático russo Aleksandr Lyapunov (LYAPUNOV, 1892). Porém, apenas 60 anos após a publicação de sua tese que o trabalho realizado por ele (na época visto como meramente teórico e muito distante de usos práticos) foi empregado em problemas de engenharia, em 1950, pelo pesquisador também soviético Lurye e outros. Nem Lyapunov nem Lurye usaram explicitamente desigualdades matriciais lineares em seus trabalhos. Em vez disso, usaram sistemas de equações polinomiais. Mas os critérios que eles usaram podem, atualmente, ser facilmente traduzidos para LMIs (BOYD et al., 1994).

As LMIs nasceram dentro da Engenharia de Controle como uma consequência natural do empenho dos pesquisadores para encontrar uma linguagem comum que contribuísse para escrever

trabalhos derivados da teoria de Lyapunov. Elas se firmaram na década de 1960, quando surgiram artigos que já estampavam o termo no título, como “O método de desigualdades matriciais na estabilidade de sistemas de controle não lineares”¹, publicado por Yakubovich em 1965. Não havia, na época, métodos que permitissem a resolução prática de LMI. Elas eram resolvidas analiticamente (BOYD et al., 1994).

No começo da década de 1970, já haviam sido desenvolvidos alguns métodos para a solução de LMIs quando pesquisadores começaram a especular se poderiam existir técnicas computacionais para isso. As LMIs se encontram com a programação linear² na década de 1980, quando surgiram as primeiras ideias de resolver LMIs por meio de uma classe de problemas conhecida na Matemática como otimizações convexas. Os métodos se mostraram muito eficientes do ponto de vista computacional e foram de fundamental importância para viabilizar a resolução de LMIs. Ao final dos anos 80, já haviam ocorrido todos os avanços para tornar a solução de LMIs factível para os casos práticos necessários até então (BOYD et al., 1994).

Recentemente, com a disponibilidade de computadores mais velozes, passou-se a revisitar métodos antigos desenvolvidos na década de 50 para a resolução de problemas de otimização que até então não podiam ser suficientemente explorados por causa da falta de ferramentas adequadas. A demanda para essas pesquisas vem principalmente de problemas de Aprendizado de Máquina e Processamento de Imagens envolvendo problemas de escala extremamente grande (CALAFIORE; GHAOUI, 2014).

Usar LMIs para resolver problemas de Engenharia de Controle pode ser conveniente porque fornece uma solução direta sem a necessidade de se fazer análise de gráficos, diagramas ou formular equações (escrever uma LMI para resolver problemas de controle é extremamente simples, como será visto neste trabalho). Além disso, as LMIs são facilmente modificáveis para atender a alterações no projeto.

Neste trabalho, serão reunidos resultados de várias fontes para expor como problemas de controle podem ser convertidos em problemas de LMI. O texto adota a seguinte sequência:

- Serão apresentados os conceitos de Engenharia de Controle úteis para o trabalho;
- Serão definidos os conceitos necessários para se compreender o que é uma LMI;
- Será dada uma definição de estabilidade no sentido de Lyapunov;
- Será enunciado um critério de estabilidade de Lyapunov;
- Será mostrado como usar LMIs para satisfazer a esse critério;
- Será definido \mathcal{D} -estabilidade;
- O critério será estendido para atender a \mathcal{D} -estabilidade;
- Será definido estabilidade robusta;
- O critério será estendido para atender a estabilidade robusta;
- Será mostrado como se pode estimar estados;
- Serão avaliadas as consequências de se usar estados estimados para realimentação;
- Serão descritas as condições suficientes para que um observador de estado funcione.

¹ Tradução livre. Original em russo: “Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем”.

² Programação linear é um método matemático usado desde 1939 para a resolução de inequações lineares.

Na parte de aplicações, será mostrado como usar as LMIs para projetar controladores e observadores, separando o projeto de acordo com as três necessidades diferentes que ele pode ter: estabilidade assintótica, \mathcal{D} -estabilidade e estabilidade robusta.

Ao final, serão mostrados exemplos para ilustrar essas aplicações. Os exemplos usarão um motor de corrente contínua e partirão da modelagem do sistema, que será de ordem 2. Depois, serão atribuídos valores numéricos aos componentes do sistema para que se possa resolver as LMIs. Serão mostrados os três casos abordados na parte de aplicações: estabilidade assintótica, \mathcal{D} -estabilidade e estabilidade robusta. Os resultados obtidos serão simulados para que se faça uma avaliação do comportamento do sistema em cada caso.

Nos apêndices, apresenta-se as ferramentas computacionais usadas, mostra-se os algoritmos usados para a resolução dos exemplos e inclui-se uma lista com conceitos básicos de Álgebra Linear e de Engenharia de Controle usados ao longo do texto.

Neste trabalho, serão sempre considerados sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo. Para simplicidade, os sistemas terão sempre uma única entrada e uma única saída.

Convenções

Quando for usado um número sem especificações, ele será assumido real. Também se utiliza apenas matrizes reais a menos que fique claro o contrário.

Muitas vezes serão omitidos os tamanhos das matrizes, em cujos casos estará implícito que elas podem ter qualquer tamanho que seja apropriado dentro da equação ou do contexto onde aparecem.

Como usual em Engenharia de Controle, vetores de uma única entrada são considerados escalares.

Os rótulos dos sinais (funções cuja variável independente é o tempo) serão frequentemente escritos sem a variável de tempo t entre parênteses (x em vez de $x(t)$) para que o texto fique mais limpo.

Algumas vezes serão omitidos índices de somatórias, em cujos casos subentende-se incluir todos os itens de um conjunto.

Como usual em Engenharia, a letra j denotará a unidade imaginária. A mesma letra é ocasionalmente usada para representar posições de matrizes, onde não há risco de confusão porque naturalmente se trata de um número inteiro.

Como comum em Engenharia de Controle, a transposta de uma matriz M será denotada por M' .

Estará implícito que todos os sistemas considerados são lineares, contínuos, invariantes no tempo, com uma única entrada e uma única saída.

Estará implícito que todos os sistemas considerados são controláveis e observáveis.

Parte I

Referenciais teóricos

1 Engenharia de Controle

1.1 Estabilidade

Estabilidade é a característica de um sistema relacionada ao comportamento de sua saída a longo prazo. Um **sistema estável** é aquele cuja saída é limitada a um valor finito. À referência de um sinal constante, a saída de um sistema estável pode ficar, com o tempo, cada vez mais próxima a um valor estacionário – e o sistema é dito **assintoticamente estável**, ou oscilar com amplitude limitada e constante em torno de um valor – nesse caso, sendo chamado de sistema **marginalmente estável**. Ao contrário, se o valor de algum estado do sistema subir ou descer sem limite mesmo para entradas constantes, o sistema é chamado de **instável**.

Quando o estado de um sistema estável fica suficientemente próximo a algum estado fixo (onde “suficientemente” depende do projeto em questão) e converge para esse estado, diz-se que o sistema entrou em **regime estacionário**. O tempo que leva desde quando o sistema é iniciado até ele entrar em regime estacionário se chama **tempo de acomodação**.

1.2 Equações do espaço de estados

Equações do espaço de estados são um sistema de equações que relacionam as entradas, as saídas, as variáveis de estado e as derivadas das variáveis de estado¹. Utilizando-as para escrever um sistema, obtém-se o formato genérico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde A , B e C são matrizes, chamadas respectivamente de “**matriz de estado**”, “**matriz de entrada**” e “**matriz de saída**”. A variável u representa a entrada da planta, e y a saída. Essas duas variáveis poderiam ser vetores, mas considera-se neste trabalho apenas sistemas de uma única entrada e uma única saída, então elas serão sempre escalares. A variável x é um vetor e representa o estado. Note que u , x e y são funções do tempo.

1.3 Modelagem de sistemas

A modelagem é um processo no qual se extrai de um sistema físico suas características fundamentais a fim de descrever o comportamento do sistema por meio de equações matemáticas.

A modelagem de um sistema físico não é única. De fato, pode-se escolher vários níveis de detalhamento: desprezar o atrito com o ar, supor que um automóvel não perde massa como resultado do gasto de combustível e supor que um pêndulo tem comportamento linear para oscilações de baixa amplitude são exemplos de decisões que podem ser tomadas na hora da modelagem que fazem com que ela seja menos detalhada (e menos acurada, portanto) em troca

¹ O leitor que não tiver familiaridade com esses termos pode consultar o Apêndice C.

de que as equações obtidas sejam menos complexas e mais fáceis de serem manipuladas dentro do contexto em questão (OGATA, 2011, cap. 2).

Também é possível que sistemas totalmente diferentes tenham a mesma equação que os descreve. De fato, a equação por si só não traz informações das características físicas do sistema (não diz, por exemplo, se trata-se de um circuito elétrico ou um sistema mecânico), somente relaciona entre si as variáveis que o compõem (OGATA, 2011, cap. 2).

Neste trabalho, serão estudados sistemas lineares invariantes no tempo, que são aqueles que podem ser satisfatoriamente modelados com equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Esses sistemas podem também ser descritos no formato da equação (1.1). Como exemplo, considere um sistema físico genérico cuja saída se relaciona com a entrada da seguinte forma:

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_n y = u. \quad (1.2)$$

Esse é o formato genérico de uma equação diferencial ordinária linear. Para escrever esse sistema no formato em (1.1), uma possibilidade é definir:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{d}{dt}y, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y, \quad (1.3)$$

de onde, imediatamente,

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = x_3, \quad \dots, \quad \frac{d}{dt}x_{n-1} = x_n. \quad (1.4)$$

De (1.2),

$$\frac{d^n}{dt^n}y = u - \left(a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_n y \right).$$

E, de (1.3), $\frac{d}{dt}x_n = \frac{d^n}{dt^n}y$. Usando isso na equação acima,

$$\frac{d}{dt}x_n = u - \left(a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_n y \right).$$

Novamente de (1.3), $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y = x_n$, ..., $y = x_1$, e a equação anterior fica:

$$\frac{d}{dt}x_n = u - (a_1 x_n + \dots + a_n x_1). \quad (1.5)$$

De (1.3), (1.4) e (1.5), esse sistema pode ser escrito no formato em (1.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x$.

1.4 Função de transferência

Considere um sistema representado pelo espaço de estados como o mostrado na Equação (1.1). Aplicando àquelas equações a transformada de Laplace (considerando condições iniciais nulas),

$$s\mathcal{X}(s) = A \times \mathcal{X}(s) + B \times \mathcal{U}(s) \quad (1.7a)$$

$$\mathcal{Y}(s) = C \times \mathcal{X}(s), \quad (1.7b)$$

onde $\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $\mathcal{Y}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ e $\mathcal{U}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$. Isolando $\mathcal{X}(s)$ em (1.7a),

$$\mathcal{X}(s) = (sI - A)^{-1} \times B \times \mathcal{U}(s), \quad (1.8)$$

assumindo $(sI - A)$ invertível. Substituindo (1.8) em (1.7b):

$$\mathcal{Y}(s) = C \times (sI - A)^{-1} \times B \times \mathcal{U}(s).$$

Aplica-se, por fim, a Propriedade C.2 das matrizes, que faz a equação acima ficar

$$\mathcal{Y}(s) = C \times \left(\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \right) \times B \times \mathcal{U}(s). \quad (1.9)$$

A **função de transferência** de um sistema é definida como a razão entre a saída e a entrada do sistema, no domínio da frequência. Assim, pela equação (1.9), a função de transferência deste sistema genérico pode ser escrita como:

$$\frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{U}(s)} = \frac{C \times \text{adj}(sI - A) \times B}{\det(sI - A)} \quad (1.10)$$

Definição 1.1: Os **polos** de um sistema são os números complexos s para os quais o denominador do lado direito da equação (1.10) se anula.

Observação 1.1: É extremamente importante observar que da Definição 1.1, da equação (1.10) e da Propriedade C.1 das matrizes (página 63) segue imediatamente que os polos de um sistema são os autovalores de sua matriz de estado.

Propriedade 1.1: O sistema é assintoticamente estável se e somente se todos os seus polos tiverem parte real negativa.

A demonstração dessa propriedade é mostrada em (MACKENROTH, 2004, teorema 2.2.1) e em (VINNICOMBE, 2011). A ideia da prova é observar que, ao transpor a equação (1.10) para o domínio do tempo por meio da transformada inversa de Laplace, cada polo p_i aparecerá como expoente em parcelas do tipo $e^{p_i t}$ multiplicadas por constantes. Se algum polo tiver parte real positiva, o número $e^{p_i t}$ cresce indefinidamente, de modo que $y(t)$ também crescerá sem limite, e o sistema seria instável.

Observação 1.2: Pelo mesmo motivo usado para justificar a Propriedade 1.1, pode-se afirmar que quanto menor for a parte real dos polos de um sistema, menor é seu tempo de acomodação. De fato, quanto menor for um número negativo p_i , mais rapidamente o número $e^{p_i t}$ se aproximará de zero.

Observação 1.3: A Observação 1.1 deixa claro que a estabilidade de um sistema depende somente de sua matriz de estado. Sendo A a matriz de estado de um sistema qualquer, se esse sistema for estável, diz-se que a matriz A é Hurwitz estável, ou, neste texto, será dito simplesmente que **a matriz A é estável**.

1.5 Realimentação de estado

Considere a equação (1.6). Ao modelar a planta no formato dessa equação, é desejável que a matriz de estado A tenha apenas autovalores negativos para que o sistema seja assintoticamente estável. Se o sistema for instável, ou se tiver um tempo de acomodação demasiadamente grande (entre outros motivos), deve-se projetar um sistema – o controlador – para ser acoplado à planta de modo que o sistema resultante tenha o comportamento desejado.

Uma possível abordagem de projeto de controle é fazer $u = r + Kx$, isto é, utilizar os estados atuais para definir a entrada da planta. Ao se fazer isso, a entrada u da planta fica sendo igual a uma referência r (que é o sinal que permite ajustar o valor da saída) somada a um sinal de controle Kx que depende do estado x em que o sistema se encontra em um certo momento e de uma matriz K que proporciona ganhos independentes para cada variável de estado que contribui com o ajuste do sinal de controle.

A tarefa é encontrar uma matriz K que faça com que a matriz de estado do sistema resultante tenha autovalores que garantam que o sistema se comporte de uma determinada maneira. De princípio, suponha que a única preocupação seja que ele seja estável. Veja os efeitos na equação (1.1) do sistema quando se modifica a planta de modo a ter-se $u = r + Kx$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{x} &= Ax + B(r + Kx) \\ \dot{x} &= (A + BK)x + Br.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Essa equação diz que o sistema resultante de união do controlador com a planta tem matriz de estado $A + BK$. Assim, deve-se encontrar uma matriz K tal que $A + BK$ seja estável, sendo que A e B são características permanentes da planta e K pode ser projetada.

Esse tipo de controle, com realimentação de estado, é o que será usado no decorrer de todo este trabalho.

Pode-se perceber que, além de garantir a estabilidade do sistema, um controlador é capaz de atenuar distúrbios ocorridos no estado. De fato, se alguma variável de estado ficar acima ou abaixo de seu valor esperado, essa informação é repassada para a entrada da planta por meio dos sinais de controle, que farão com que esse sinal de entrada se ajuste e o estado volte a ter o valor esperado.

2 Desigualdades matriciais lineares

O projeto de controladores e observadores será formulado neste trabalho com desigualdades matriciais lineares. Não será necessário conhecer métodos de resolução de LMIs, porque elas serão sempre resolvidas com ferramentas computacionais. Porém, para entender como as desigualdades devem ser formuladas e para, portanto, ser possível usar essas ferramentas, é necessário haver alguma base teórica, apresentada a seguir. Os conceitos apresentados neste capítulo serão usados em todos os capítulos seguintes para o desenvolvimento de métodos que tornarão o uso de LMIs útil para projetos de Engenharia de Controle.

Para definir uma LMI, parte-se do conceito de matriz positiva definida:

Definição 2.1: Seja M uma matriz de tamanho $n \times n$ e $v \neq 0$ um vetor-coluna de tamanho n . (Note que $v'Mv$ é um escalar.) A matriz M é **positiva definida** se para todo v ocorrer $v'Mv > 0$. Se M for positiva definida, escreve-se $M \succ 0$. Similarmente, se $-M \succ 0$, então escreve-se $M \prec 0$ e diz-se que M é **negativa definida** (GEROMEL; KOROGUI, 2011, p. 79).

Propriedade 2.1: Se uma matriz for negativa definida, então todos os seus autovalores são negativos. Similarmente, se uma matriz for positiva definida, então todos os seus autovalores são positivos. As recíprocas também são verdadeiras (GEROMEL; KOROGUI, 2011, p. 79).

Propriedade 2.2:

Se $M_1 \succ 0$ e $M_2 \succ 0$, então $M_1 + M_2 \succ 0$.

Se $M_1 \prec 0$ e $M_2 \prec 0$, então $M_1 + M_2 \prec 0$.

Demonstração: Se $M_1 \succ 0$ e $M_2 \succ 0$, então, pela Definição 2.1, $v'M_1v > 0$ e $v'M_2v > 0$ para todo v . Mas note que $v'(M_1 + M_2)v = v'M_1v + v'M_2v$ é a soma de dois números positivos, então $v'(M_1 + M_2)v > 0$ e portanto $M_1 + M_2 \succ 0$. O caso negativo é análogo. \square

Propriedade 2.3:

Se $a > 0$ e $M \succ 0$, então $a \times M \succ 0$.

Se $a > 0$ e $M \prec 0$, então $a \times M \prec 0$.

Demonstração: Pela Propriedade 2.1, a positividade dos autovalores de uma matriz determina se ela é positiva definida ou negativa definida. Os autovalores da matriz $a \times M$ são os autovalores de M multiplicados por a . Então, se a for positivo, os autovalores de $a \times M$ têm a mesma positividade que os de M . \square

Propriedade 2.4: Uma matriz é positiva definida se e somente se todos os seus menores principais líderes forem positivos (HSIUNG; MAO, 1998).

Propriedade 2.5: Uma matriz é negativa definida se e somente se seu menor principal líder de ordem k tiver o mesmo sinal que $(-1)^k$, para cada k de 1 até n , sendo n a ordem da matriz (HSIUNG; MAO, 1998).

Propriedade 2.6: Seja M uma matriz simétrica e Q uma matriz invertível. Ocorre (SAGNOL, 2014)

$$M \prec 0 \Leftrightarrow QMQ' \prec 0.$$

A operação $M \mapsto QMQ'$ é chamada de transformação de congruência de M com Q .

Uma LMI pode ser entendida como um somatório de matrizes simétricas conhecidas F_0 e F_1, \dots, F_n multiplicadas por incógnitas escalares x_1, \dots, x_n . O objetivo primário é encontrar valores para essas incógnitas de modo que o somatório das matrizes seja uma matriz positiva definida. Uma LMI genérica pode ser escrita na forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n (x_i \cdot F_i) \succ 0. \quad (2.1)$$

Este trabalho se interessa particularmente por uma LMI conhecida como Desigualdade de Lyapunov (BOYD et al., 1994):

$$PM + M'P \prec 0. \quad (2.2)$$

Nessa desigualdade, a matriz M é dada e a matriz P é uma matriz simétrica positiva definida que se deseja encontrar para que a desigualdade se verifique.

Apesar de estar bem diferente da forma geral de LMIs mostrada em (2.1), essa equação pode ser colocada naquele formato fazendo-se:

- Tome um conjunto P_1, \dots, P_n que seja uma base para matrizes simétricas, isto é, um conjunto de matrizes P_i tais que se possa escrever $P = x_1 P_1 + \dots + x_n P_n$ para algum conjunto de escalares x_i e P simétrica como em (2.2);
- Em (2.1), tome $F_0 = 0$;
- Em (2.1), tome $F_i = -(P_i M + M' P_i)$, com P_i como especificado acima.

De fato, copiando a desigualdade em (2.1):

$$F(x) = F_0 + \sum (x_i \cdot F_i) \succ 0,$$

e substituindo os valores como especificado acima:

$$0 + \sum (x_i [-(P_i M + M' P_i)]) \succ 0.$$

Ocultando a parcela nula e colocando o sinal de menos em evidência:

$$-\left(\sum x_i (P_i M + M' P_i)\right) \succ 0.$$

Usando a definição de matriz negativa definida:

$$\left(\sum x_i (P_i M + M' P_i)\right) \prec 0.$$

Colocando M e M' em evidência:

$$\left(\sum (x_i P_i)\right) M + M' \left(\sum (x_i P_i)\right) \prec 0$$

E substituindo P como especificado acima:

$$PM + M'P \prec 0,$$

como se queria.

Entende-se, dessa maneira, que a desigualdade em (2.2) é uma LMI e resolvê-la consiste em encontrar uma matriz P que a satisfaça.

3 Critérios de estabilidade

3.1 Estabilidade assintótica

Dois critérios de estabilidade foram apresentados pelo matemático russo Aleksandr Lyapunov em sua tese de doutorado em 1892. O primeiro método utiliza aproximações lineares. O segundo é o que será mostrado neste trabalho. Para começar, será dada uma definição de estabilidade similar à que ofereceu Lyapunov em sua tese (RAMPONI, 2010).

Note que, da Observação 1.3, a estabilidade de um sistema depende apenas da sua matriz de estado. Então, por simplicidade, será considerado um sistema autônomo¹:

$$\dot{x} = Mx \quad (3.1)$$

Entenda $x(t)$ como a solução da equação (3.1) para uma certa condição inicial $x(0)$, e entenda x_e como um certo estado do sistema ($x(t) = x_e$ para algum t).

Definição 3.1 (Estabilidade): Um sistema é **estável** (no sentido de Lyapunov) com ponto de equilíbrio x_e se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

Em palavras: se um sistema for estável, dado um estado x_e , se forem providenciadas condições iniciais $x(0)$ suficientemente próximas de x_e , pode-se obter, para todo $t > 0$, um estado tão próximo de x_e quanto se queira.

Definição 3.2 (Estabilidade assintótica): Um sistema é **assintoticamente estável** (no sentido de Lyapunov) se a equação (3.2) valer e ainda $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$, isto é, se o erro entre o estado esperado x_e e o estado real $x(t)$ tender a zero.

Propriedade 3.1: Segue da definição acima que se o sistema for assintoticamente estável, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 0$, já que x tende a uma constante.

Será enunciado agora um dos teoremas da tese de doutorado de Lyapunov, que aparece na seção 16 de (LYAPUNOV, 1892). A versão enunciada aqui é similar às encontradas em (HOKAYEM; GALLESTEY, 2015) e (PIÑA, 2009, cap. 5.2.1).

Teorema 3.1 (Método direto de Lyapunov): Se existir uma função $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável em $x(t)$ que satisfaça às condições abaixo:

- i) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ii) $V(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, com $x \neq 0$;
- iii) $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, com $x \neq 0$,

então o sistema $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável.

¹ Um sistema autônomo é aquele onde o sinal de entrada é ausente.

Um tipo especial de função que pode funcionar para as condições do Teorema 3.1 é a função quadrática de Lyapunov, definida a seguir:

Definição 3.3 (Função quadrática de Lyapunov): Fixada uma matriz P simétrica qualquer, uma **função quadrática de Lyapunov** candidata é uma função $V(x)$ de \mathbb{R}^n para \mathbb{R} que tem o formato

$$\begin{aligned} V(x) &= x'Px \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \times P_{(i,j)} \times x_j. \end{aligned}$$

Note a semelhança entre essa função e a Definição 2.1 de matriz positiva definida.

Propriedade 3.2: Um sistema linear é assintoticamente estável se e somente se houver uma função quadrática de Lyapunov que satisfaça às condições do Teorema 3.1 (JOHANSSON, 2003).

De posse do Teorema 3.1 e da Propriedade 3.2, será apresentado agora um outro teorema, que vai permitir que problemas de determinar estabilidade de sistemas lineares sejam transformados em problemas de resolução de LMI.

Teorema 3.2: Uma matriz M é assintoticamente estável se existir uma matriz $P \succ 0$ tal que

$$PM + M'P \prec 0.$$

Observe que essa é a mesma desigualdade mostrada em (2.2).

Demonstração: A demonstração será feita provando-se que, para a matriz P da hipótese, existe uma função $V(x)$ como a da Definição 3.3

$$V(x) = x'Px$$

que satisfaz às três condições impostas pelo Teorema 3.1:

- i) Se $x = 0$, é imediato que $V(x) = 0$. Reciprocamente, se $V(x) = 0$, então $x = 0$, senão P não seria positiva definida, pela Definição 2.1.
- ii) Como $P \succ 0$ por hipótese, segue da Definição 2.1 que $V(x) = x'Px > 0$ para todo $x \neq 0$, o que atende à condição (ii) do Teorema 3.1.
- iii) Falta apenas mostrar que $\dot{V}(x) < 0$, o que atenderá à terceira condição do Teorema 3.1.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'P\dot{x} + \dot{x}'Px \\ &= x'PMx + x'M'Px \\ &= x'(PM + M'P)x, \end{aligned}$$

onde foi usada a equação de estados $\dot{x} = Mx$ do sistema para substituir o valor de \dot{x} . Da hipótese, $PM + M'P \prec 0$. Segue então que $\dot{V}(x) = x'(PM + M'P)x < 0$, pela Definição 2.1.

Assim, existe uma função $V(x)$ que atende a todas as condições do Teorema 3.1, portanto o sistema $\dot{x} = Mx$ é assintoticamente estável e M é assintoticamente estável. \square

Teorema 3.3: Uma matriz M é assintoticamente estável se existir uma matriz $P \succ 0$ tal que

$$MP + PM' \prec 0.$$

Observe que essa é a mesma desigualdade do teorema anterior mas com a ordem das multiplicações invertida.

Demonstração: Da Propriedade 2.6:

$$M \prec 0 \Leftrightarrow QMQ' \prec 0$$

então

$$PM + M'P \prec 0 \Leftrightarrow P^{-1}(PM + M'P)(P^{-1})' \prec 0,$$

tendo sido usado $Q = P^{-1}$. Como $P \succ 0$ então P tem inversa. Reescrevendo a desigualdade acima:

$$P^{-1}(PM + M'P)(P^{-1})' \prec 0$$

Como P é simétrica, P^{-1} também é, e $(P^{-1})' = P^{-1}$. Fazendo a distributiva:

$$P^{-1}PMP^{-1} + P^{-1}M'PP^{-1} \prec 0$$

e usando o fato que $P^{-1}P = PP^{-1} = I$ e $IM = MI = M \forall M$:

$$MP^{-1} + P^{-1}M' \prec 0.$$

Pelo Teorema 3.2, uma matriz M é estável se existir uma matriz $P \succ 0$ tal que $PM + M'P \prec 0$. Dos argumentos acima, isso equivale a $MP^{-1} + P^{-1}M' \prec 0$. Para simplificar a escrita, em vez de procurar uma matriz P^{-1} que satisfaça a essa desigualdade, pode-se muito bem procurar uma P (muda-se o rótulo da incógnita). Assim, M é assintoticamente estável se $MP + PM' \prec 0$. \square

3.2 \mathcal{D} -estabilidade

Considere agora o problema da alocação de polos. Desta vez, existe uma preocupação não apenas que o sistema seja estável, mas também que os polos, além de estarem no semiplano esquerdo, estejam em uma região específica do semiplano esquerdo. Será mostrada nesta seção uma extensão do critério de estabilidade de Lyapunov que permite resolver esse problema.

Garantir que os polos estejam em uma determinada região assegura que o sistema possua certas características. Abaixo estão listados os principais efeitos que a posição dos polos traz a um sistema estável (CHILALI; GAHINET, 1996).

- Distância do polo ao eixo imaginário: quanto maior for o valor absoluto da parte real do polo, menor é o tempo de acomodação do sistema;
- Inclinação da reta que contém o polo e a origem: quanto maior for o valor absoluto da parte imaginária do polo em razão da sua parte real, maior é o amortecimento do sistema;
- Distância do polo à origem: quanto maior, maior é a frequência natural do sistema.

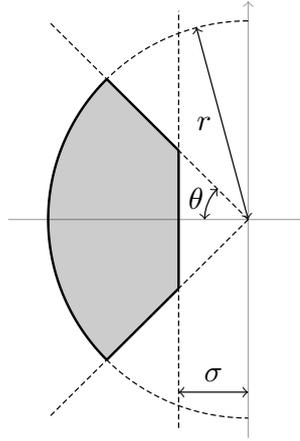
Geralmente, quer-se limitar o tempo de acomodação do sistema, limitar seu amortecimento e impedir que sua frequência natural seja muito alta. Essas três restrições podem ser obedecidas colocando-se todos os polos do sistema em uma região como a da Figura 3.1. Essa figura destaca

uma região do plano que é composta por números complexos $z = a + bj$ que satisfazem às três condições abaixo:

$$\begin{aligned} a &< -\sigma \\ |\arg(z)| &< \theta \\ \|z\| &< r, \end{aligned}$$

onde $\sigma > 0$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ e $r > 0$.

Figura 3.1: Região do plano complexo (preenchida em cinza) formada pelos números $z = a + bj$ tais que $a < -\sigma$, $|\arg(z)| < \theta$ e $\|z\| < r$.



3.2.1 Regiões LMI

Definição 3.4: Uma **região LMI** é um conjunto \mathcal{D} do plano complexo que pode ser escrita como

$$\mathcal{D} = \{z = a + bj : f_{\mathcal{D}}(z) < 0\},$$

onde a função $f_{\mathcal{D}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ tem o formato

$$f_{\mathcal{D}}(z) = zE + \bar{z}E' + F \tag{3.4}$$

e é chamada de **função característica** de \mathcal{D} , com E e F sendo matrizes reais, F simétrica.

Uma matriz M é dita **\mathcal{D} -estável** se todos os autovalores de M pertencerem à região \mathcal{D} .

Definição 3.5: A matriz $R_{\mathcal{D}}$ é a **matriz característica**² de uma região que tem função característica $f_{\mathcal{D}}(z) = zE + \bar{z}E' + F$ e de uma matriz M e é tal que

$$R_{\mathcal{D}(i,j)} = E_{(i,j)}MP + E_{(j,i)}PM' + F_{(i,j)}P, \tag{3.5}$$

para alguma matriz P simétrica. Perceba que a notação sugere uma matriz de blocos.

Teorema 3.4: Uma matriz M é \mathcal{D} -estável se e somente se existir uma matriz P para a qual a matriz $R_{\mathcal{D}}$ seja negativa definida (CHILALI; GAHINET, 1996, teorema 2.2).

Abaixo estão listados três tipos de região LMI que serão importantes neste trabalho, com suas respectivas funções características.

² Nomenclatura dada por este autor.

3.2.1.1 O semiplano $a < -\sigma$

Fazem parte deste conjunto os pontos $z = a + bj$ tais que

$$f_{\mathcal{D}}(z) = z + \bar{z} + 2\sigma.$$

Para ver que essa função característica de fato descreve a região LMI \mathcal{D} compreendendo o semiplano $a < -\sigma$, note que $z + \bar{z} = 2a$, de modo que $z + \bar{z} + 2\sigma < 0$ equivale a $a + \sigma < 0$.

Por inspeção, pode-se encontrar as matrizes E e F para deixar essa função característica no formato de (3.4), de onde se chega a $E = 1$ e $F = 2\sigma$. Usando essas matrizes, pode-se facilmente chegar à matriz característica, que pode ser encontrada por (3.5): $R_{\mathcal{D}(1,1)} = E_{(1,1)}MP + E_{(1,1)}PM' + F_{(1,1)}P$, ou

$$R_{\mathcal{D}} = MP + PM' + 2\sigma P. \quad (3.6)$$

3.2.1.2 O círculo com centro em $(0,0)$ e raio r

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & z \\ \bar{z} & -r \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

De fato, pela Propriedade 2.5, se $f_{\mathcal{D}}(z) < 0$, então:

- O menor principal líder de ordem 1 de $f_{\mathcal{D}}(z)$ deve ser negativo: o menor principal de ordem 1 de $f_{\mathcal{D}}(z)$ na equação (3.7) é $-r$, sempre negativo.
- O menor principal líder de ordem 2 de $f_{\mathcal{D}}(z)$ deve ser positivo: o menor principal de ordem 2 é $r^2 - z\bar{z} = r^2 - a^2 - b^2$. Se esse número for positivo, então $a^2 + b^2 < r^2$, ou seja, z está dentro da circunferência de raio r posicionada com centro na origem do plano complexo, como se quer.

Como feito no item anterior, encontra-se $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}$. Usando essas matrizes para determinar $R_{\mathcal{D}}$:

- $R_{\mathcal{D}(1,1)} = E_{(1,1)}MP + E_{(1,1)}PM' + F_{(1,1)}P = 0 \times MP + 0 \times PM' + -rP = -rP$;
- $R_{\mathcal{D}(1,2)} = E_{(1,2)}MP + E_{(2,1)}PM' + F_{(1,2)}P = 1 \times MP + 0 \times PM' + 0 \times P = MP$;
- $R_{\mathcal{D}(2,1)} = E_{(2,1)}MP + E_{(1,2)}PM' + F_{(2,1)}P = 0 \times MP + 1 \times PM' + 0 \times P = PM'$;
- $R_{\mathcal{D}(2,2)} = E_{(2,2)}MP + E_{(2,2)}PM' + F_{(2,2)}P = 0 \times MP + 0 \times PM' + -rP = -rP$.

Escreve-se, com essas matrizes, a matriz de blocos

$$R_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -rP & MP \\ PM' & -rP \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2.1.3 A seção cônica com centro em $(0,0)$ e ângulo 2θ simétrica em torno do eixo real

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} (z + \bar{z}) \sen \theta & (z - \bar{z}) \cos \theta \\ (\bar{z} - z) \cos \theta & (z + \bar{z}) \sen \theta \end{bmatrix} < 0$$

Do mesmo modo que foi feito anteriormente para justificar a escolha da função $f_{\mathcal{D}}(z)$:

- O menor principal líder de ordem 1 deve ser menor que zero: $(z + \bar{z}) \operatorname{sen} \theta < 0 \Rightarrow 2a \operatorname{sen} \theta < 0 \Rightarrow a < 0$, já que $0 < \theta < 90^\circ$.
- O menor principal líder de ordem 2 deve ser maior que zero:

$$(2a \operatorname{sen} \theta)^2 - (-2bj \cos \theta \times 2bj \cos \theta) > 0$$

Resolvendo as multiplicações, lembrando que $j^2 = -1$:

$$4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 4b^2 \cos^2 \theta > 0$$

Dividindo por 4 e separando as parcelas:

$$a^2 \operatorname{sen}^2 \theta > b^2 \cos^2 \theta$$

Dividindo os dois lados por $a^2 \cos^2 \theta$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} > \frac{b^2}{a^2}$$

Usando $\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$ e $\operatorname{tg} \arg z = \frac{b}{a}$:

$$\operatorname{tg}^2 \theta > \operatorname{tg}^2(\arg z)$$

Como $f(x) = x^2$ é uma função par e crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$,

$$|\operatorname{tg} \theta| > |\operatorname{tg}(\arg z)|$$

E como $\operatorname{tg} \theta$ é uma função crescente para $-90^\circ < \theta < 90^\circ$,

$$|\arg z| < |\theta|,$$

como se quer.

A matriz característica desta região é:

$$R_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} (MP + PM') \operatorname{sen} \theta & (MP - PM') \cos \theta \\ (PM' - MP) \cos \theta & (MP + PM') \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Note agora que se pode solucionar o problema de alocação de polos por meio da resolução do sistema de LMIs no qual as três matrizes das equações (3.6), (3.8) e (3.9) são negativas definidas, de acordo com o Teorema 3.4.

3.3 Estabilidade robusta

Também é possível projetar um controlador que funcione não só para uma matriz de estado como também para todas as matrizes de estado que sejam combinações lineares com coeficientes positivos de um conjunto de matrizes. Por exemplo, é possível garantir a estabilidade de uma matriz M que tenha a forma

$$M = \sum \phi_i M_i, \quad \phi_i > 0$$

apenas assegurando-se que para cada M_i seja possível encontrar uma mesma matriz P como a do Teorema 3.2 que garanta sua estabilidade.

Em particular, pode-se usar esse método para garantir a estabilidade de uma combinação convexa M de um conjunto de matrizes M_i , que é uma matriz da forma

$$M = \sum \phi_i M_i, \quad \phi_i \geq 0, \quad \sum \phi_i = 1.$$

Projetar um controlador que funcione para uma família de matrizes de estado é útil para lidar com incertezas no projeto. Um controlador que funciona com incertezas é chamado de **controlador robusto**. Uma incerteza como a descrita acima é conhecida como incerteza politópica (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003).

Incertezas devem ser consideradas quando não se tem, no momento do projeto do controlador, os valores exatos de alguns dados do sistema. E o projeto de controle robusto é útil também porque um mesmo sistema pode mudar suas características devido a envelhecimento ou a mudanças do ambiente, como temperatura, umidade e outros, e também por erros decorridos da modelagem.

Teorema 3.5: Seja M_i um conjunto de matrizes e seja $P \succ 0$ uma matriz tal que

$$PM_i + M_i'P \prec 0. \quad (3.10)$$

Uma matriz da forma $M = \sum \phi_i M_i$, $\phi_i \geq 0$, $\sum \phi_i = 1$ é assintoticamente estável.

Demonstração: Usando-se a fórmula do Teorema 3.2 com M :

$$\begin{aligned} PM + M'P &= \\ P \left(\sum \phi_i M_i \right) + \left(\sum \phi_i M_i \right)' P &= \\ \sum (\phi_i PM_i) + \sum (\phi_i M_i'P) &= \\ \sum (\phi_i (PM_i + M_i'P)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Primeiro, note que pelo menos um número do conjunto ϕ_i é diferente de 0, caso contrário a soma deles não seria igual a 1 como na hipótese. Seja então ϕ_i^* o conjunto de todos os ϕ_i que são diferentes de 0. De (3.10), $PM_i + M_i'P$ é negativa definida. Então, ao ser multiplicada por um número positivo (como são todos os ϕ_i^*), o produto é negativo definido (Propriedade 2.3). Portanto, a equação (3.11) é um somatório de matrizes definidas negativas e a soma é negativa definida (Propriedade 2.2). Ou seja,

$$PM + M'P \prec 0.$$

Assim, de acordo com o Teorema 3.2, a matriz M é assintoticamente estável. \square

Observação 3.1: Pode-se de maneira análoga mostrar que se cada M_i for \mathcal{D} -estável, então M também é.

4 Observabilidade

Considere a tarefa de projetar um controlador com realimentação de estado, exatamente como o descrito na Seção 1.5, onde mostrou-se que um controlador de realimentação de estados acoplado a uma planta fornece a equação resultante

$$\dot{x} = (A + BK)x + Br. \quad (4.1)$$

Considere, porém, que por algum motivo não seja possível ou desejável medir diretamente uma ou algumas das variáveis de estado do sistema (representado por x na equação (4.1)). Para projetar um controle com realimentação de estados mesmo sem acesso a algumas variáveis, pode-se projetar um observador de estados. Um observador deve usar a saída do sistema ou outras variáveis de estado para estimar as variáveis que não podem ser medidas.

Um sistema é dito observável se for possível determinar seu estado a partir do conhecimento de sua saída por um período finito de tempo (OGATA, 2011, cap. 9.7). Todos os sistemas usados neste texto serão assumidos observáveis.

Suponha então que uma ou mais variáveis do estado x não possam ser diretamente medidas. Assim, x não pode ser usado na equação (4.1) para o cálculo de \dot{x} . Faz-se uso então de um substituto de x , chamado de **estado estimado** e rotulado \hat{x} . Esse estado estimado deve ser calculado de alguma forma, para então poder ser usado para o controle do sistema.

Para entender o funcionamento de um observador, deve-se analisar quais efeitos usar um estado estimado em vez do real traria para o controle do sistema. Na Seção 1.5 foi mostrada a equação resultante para um sistema com controlador por realimentação de estados que usa o estado real. A diferença é que agora a realimentação de estado será feita com um vetor de estado estimado. Então, a entrada u passará a ser

$$u = r + K\hat{x}$$

e a equação que rege o sistema será

$$\dot{x} = Ax + Br + BK\hat{x}. \quad (4.2)$$

Observe que o vetor que multiplica a matriz A continua sendo x , e não \hat{x} , pois aí não se trata de uma realimentação e sim do comportamento interno da própria planta.

Imagine um observador que use a saída y para estimar os estados. Isso pode ser obtido usando-se alguma matriz L e fazendo-se o observador ter a forma

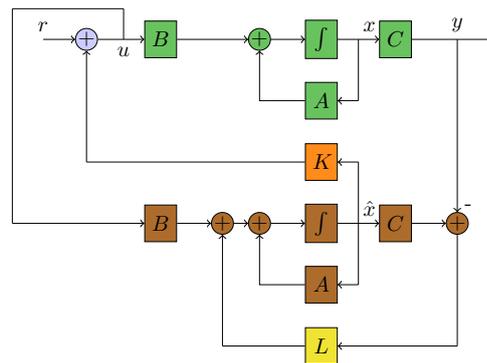
$$\dot{\hat{x}} = (A + BK)\hat{x} + Br + L(\hat{y} - y), \quad (4.3)$$

onde \hat{y} é igual a $C\hat{x}$, ou seja, é a saída estimada da planta, obtida quando os cálculos são feitos com \hat{x} no lugar de x .

O que se espera de um observador de estados é que o estado estimado por ele (que será usado pelo controlador) fique, eventualmente, igual ao estado real do sistema. Quando isso acontecer, conseqüentemente a saída estimada será igual à saída real (porque a saída é uma combinação linear dos estados) e a parcela $L(y - \hat{y})$ da equação (4.3) se anula, de modo que a equação (4.3) fica exatamente igual à equação (4.1). Resta então encontrar uma matriz L que faça isso acontecer. Designadamente, quer-se que a matriz L ofereça acréscimos (positivos ou negativos) convenientes para cada variável do vetor de estado estimado \hat{x} para que ele se iguale a x com o passar do tempo. Esses acréscimos são proporcionais ao erro $y - \hat{y}$. O fator de proporcionalidade pode ser diferente para cada variável de \hat{x} e esses fatores serão dados pelas entradas da matriz L .

A Figura 4.1 mostra o esquemático de um observador conectado a uma planta. Note que o observador é como um clone da planta (acrescida de uma L que faz realimentação com o erro de estimação da saída), com a vantagem de que qualquer sinal interno do observador pode sempre ser obtido (por construção), o que não necessariamente ocorre com a planta.

Figura 4.1: Esquemático de um controlador (laranja) alimentado por um observador (marrom e amarelo) conectado a uma planta (verde).



Agora serão escritas equações que descrevam o comportamento desse sistema formado por uma planta, um controlador e um observador. Rotula-se

$$\varepsilon = \hat{x} - x. \tag{4.4}$$

Reescrevendo a equação (4.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Br + BK\hat{x} + BKx - BKx \\ \dot{x} &= (A + BK)x + BK\varepsilon + Br. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da equação (4.3):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A + BK)\hat{x} + Br + L(C\hat{x} - Cx) \\ \dot{\hat{x}} &= (A + BK)\hat{x} + Br + LC(\hat{x} - x) \\ \dot{\hat{x}} &= (A + BK)\hat{x} + LC\varepsilon + Br \end{aligned} \tag{4.6}$$

Usando as equações (4.4), (4.5) e (4.6):

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\
 &= (A + BK)\hat{x} + LC\varepsilon + Br - (A + BK)x - BK\varepsilon - Br \\
 &= (A + BK)\varepsilon + LC\varepsilon - BK\varepsilon \\
 &= ((A + BK) + LC - BK)\varepsilon \\
 &= (A + LC)\varepsilon
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Com as equações (4.5) e (4.7) pode-se escrever para o sistema a seguinte equação de estados estendida:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \\
 y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Note que essa equação representa um estado com o dobro do tamanho do estado do sistema original, pois agora se deve considerar não só o estado do sistema, x , como também sua versão estimada, \hat{x} , que é representado na equação (4.8) por $\varepsilon = \hat{x} - x$.

Propriedade 4.1: Se a equação (4.8) representar um sistema assintoticamente estável, há garantia que tanto o controlador quanto o observador funcionam.

Demonstração: Segue da Propriedade 3.1 que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = 0$. Assim, para $t \rightarrow \infty$, ocorre

$$\begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Disso, nota-se que:

- O observador funciona, porque o erro de estimação ε tende a zero;
- O controlador funciona, porque, para um tempo infinito, $\dot{x} = (A + BK)x + Br$, exatamente como em (1.11). \square

Agora, a tarefa de projetar um controlador e um observador para um sistema consiste em encontrar uma matriz L e uma matriz K para as quais o sistema da equação (4.8) seja assintoticamente estável. Para isso, deve ser encontrada uma matriz de estado para (4.8) em que todos os autovalores tenham parte real negativa. Para viabilizar esse trabalho, será usado o Princípio da Separação.

4.1 Princípio da Separação

O Princípio da Separação de Estimação e Controle afirma que se pode projetar o controlador e o observador de um sistema de modo independente. O problema pode, portanto, ser quebrado em duas partes, o que facilita o projeto (MAZZINI, 2016).

Para demonstrar essa afirmação, será usada a matriz de blocos

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}.$$

Observe que o formato dessa matriz é o mesmo da matriz de estado da equação (4.8).

Será mostrado a seguir que os autovalores de M são a união dos autovalores de M_{11} e de M_{22} . A demonstração será dividida em duas partes recíprocas, os Lemas 4.1 e 4.2.

Lema 4.1: Os autovalores de M_{11} e de M_{22} são todos autovalores de M .

Demonstração: Primeiro será mostrado que se λ_1 for um autovalor da matriz M_{11} , com autovetor v_1 , então ele é também um autovalor da matriz M , com o mesmo autovetor aumentado com zeros. Pela definição de autovalor,

$$M_{11}v_1 = \lambda_1v_1,$$

e $v_1 \neq 0$. Note que

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é, existe um vetor não nulo $\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ tal que $M \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então, todo autovalor λ_1 de M_{11} é também um autovalor de M .

Agora considere um autovalor λ_2 de M_{22} com autovetor v_2 . Se λ_2 for também um autovalor de M_{11} , não há nada a fazer, pois, pelos argumentos acima, já é possível concluir que ele é um autovalor de M . Veja então o caso em que λ_2 não é um autovalor de M_{11} . Assim, garante-se que $\det(M_{11} - \lambda_2 I) \neq 0$ (o que será útil adiante). Fazendo a multiplicação

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}v + M_{12}v_2 \\ \lambda_2v_2 \end{bmatrix},$$

é possível observar que, para encontrar um autovetor de M com λ_2 sendo o autovalor correspondente, basta encontrar um v que

$$\begin{bmatrix} M_{11}v + M_{12}v_2 \\ \lambda_2v_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} v \\ v_2 \end{bmatrix},$$

o que acontece se

$$\lambda_2v = M_{11}v + M_{12}v_2$$

$$(\lambda_2 I - M_{11})v = M_{12}v_2,$$

isto é, basta fazer $v = -(\lambda_2 I - M_{11})^{-1}M_{12}v_2$. Essa matriz existe porque, como ressaltado acima, $\det(M_{11} - \lambda_2 I) \neq 0$, o que garante que $(M_{11} - \lambda_2 I)$ tem inversa. \square

Lema 4.2 (Recíproca do Lema 4.1): Se λ for um autovalor de M , então ele é um autovalor de M_{11} ou de M_{22} .

Demonstração: Seja $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ o autovetor correspondente ao autovalor λ . Da hipótese,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

de onde

$$\begin{bmatrix} M_{11}v_1 + M_{12}v_2 \\ M_{22}v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo que

$$\begin{cases} M_{11}v_1 + M_{12}v_2 = \lambda v_1 \\ M_{22}v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \quad (4.9a)$$

$$(4.9b)$$

Se $v_2 \neq 0$, λ é autovalor de M_{22} (da equação (4.9b));

Se $v_2 = 0$, λ é autovalor de M_{11} (da equação (4.9a)).

Note apenas que se $v_2 = 0$ então $v_1 \neq 0$, senão $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ não poderia ser um autovetor. \square

Teorema 4.1 (Princípio da Separação): Projetar um sistema de controlador com observador para o sistema como o da equação (4.8) é uma tarefa que pode ser alcançada fazendo-se:

1. Projetar uma matriz K para que $A + BK$ seja assintoticamente estável;
2. Projetar uma matriz L para que $A + LC$ seja assintoticamente estável.

Demonstração: Se forem escolhidas matrizes K e L de modo que $A + BK$ e $A + LC$ sejam assintoticamente estáveis, os autovalores de $A + BK$ e de $A + LC$ todos têm parte real negativa (da Propriedade 1.1). Dos Lemas 4.1 e 4.2, os autovalores da matriz de estado da equação (4.8) são a união dos autovalores de $A + BK$ e $A + LC$. Assim, também a matriz de estado da equação (4.8) tem somente autovalores com partes reais negativas e logo aquele sistema é assintoticamente estável. Então, de acordo com as considerações da Propriedade 4.1, o controlador e o observador projetados funcionam como esperado. \square

Agora, em vez de encontrar matrizes K e L que estabilizem (4.8), é possível separadamente encontrar uma matriz K que estabilize $A + BK$ e uma L que estabilize $A + LC$. Sem o Princípio da Separação, não existiria garantia de que, ao modificar-se o observador, o controlador continue funcionando para o sistema, ou vice-versa.

Parte II

Aplicações

5 Projeto de controladores

Este capítulo mostrará como usar a teoria desenvolvida na parte anterior para o projeto de controladores e observadores. Lembre-se da Propriedade 4.1 que projetar um controlador e um observador para um sistema do tipo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

consiste em encontrar matrizes K e L para que a matriz \mathfrak{A} seja assintoticamente estável, onde

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix}.$$

Observação 5.1: Pelo Teorema 4.1, encontrar K e L para que \mathfrak{A} seja assintoticamente estável é o mesmo que encontrar uma matriz K para que $A + BK$ seja assintoticamente estável e uma matriz L para que $A + LC$ seja assintoticamente estável.

5.1 Estabilidade assintótica

Voltando ao Teorema 3.3, retoma-se que uma matriz M é assintoticamente estável se existir uma matriz $P \succ 0$ tal que

$$MP + PM' \prec 0.$$

Pela Observação 5.1, deve-se encontrar K e L para que $A + BK$ e $A + LC$ sejam assintoticamente estáveis. Para tanto, serão usados os Teoremas 3.2 e 3.3.

5.1.1 Projeto do controlador

Usando o Teorema 3.3 com $M = A + BK$, tem-se:

$$\begin{aligned}(A + BK)P + P(A + BK)' &\prec 0 \\ (A + BK)P + P(A' + K'B') &\prec 0 \\ AP + BKP + PA' + PK'B' &\prec 0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

e deve-se encontrar uma matriz K e uma matriz $P \succ 0$ para que a equação (5.1) se verifique. Mas isso não é ainda uma LMI, porque ocorre a multiplicação de duas incógnitas, KP e PK' . Faz-se então uma mudança de variável $W = KP$:

$$AP + BW + PA' + W'B' \prec 0$$

e agora sim há uma LMI.

Para discernir entre as incógnitas do projeto do controlador e do observador (que não são, em geral, iguais), serão renomeadas as variáveis $W = W_c$ e $P = P_c$. As incógnitas do controlador (projetado adiante) serão P_o e W_o . Tem-se então a seguinte LMI para projetar o controlador:

$$AP_c + BW_c + P_c A' + W_c' B' \prec 0.\tag{5.2}$$

Resolver essa LMI significa encontrar duas matrizes P_c e W_c . Uma vez encontradas, basta tomar $K = W_c P_c^{-1}$. Note que $P_c \succ 0$, logo seu determinante é positivo e então ele tem uma inversa (isso decorre das Propriedades 2.1, C.4 e C.3).

5.1.2 Projeto do observador

Usando agora o Teorema 3.2 com $M = A + LC$ para projetar o observador:

$$\begin{aligned} P(A + LC) + (A + LC)'P &< 0 \\ P(A + LC) + (A' + C'L')'P &< 0 \\ PA + PLC + A'P + C'L'P &< 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde desta vez quer-se encontrar uma matriz L e uma $P \succ 0$ que satisfaçam a equação (5.3). Novamente, essa equação ainda não é uma LMI. As duas incógnitas são P e L , de modo que é desejável trocar as multiplicações dessas variáveis por uma nova variável. Faz-se então a mudança de variável $W = PL$:

$$PA + WC + A'P + C'W' < 0.$$

Como antes, serão renomeados $P = P_o$ e $W = W_o$ e a desigualdade ficará

$$P_o A + W_o C + A' P_o + C' W_o' < 0. \quad (5.4)$$

Ao resolver-se essa desigualdade, encontrando-se um W_o e um P_o , basta fazer $L = P_o^{-1} W_o$.

5.2 \mathcal{D} -estabilidade

Considere agora que seja desejável que os polos do controlador e do observador estejam em uma região \mathcal{D} específica do plano complexo limitada como na Figura 3.1, tendo \mathcal{D} sido definida na Definição 3.4. Como mostrado na Seção 3.2.1 e por causa do Teorema 3.4, isso pode ser feito se for encontrada uma solução para as três LMIs abaixo:

$$MP + PM' + 2\sigma P < 0 \quad (5.5a)$$

$$\begin{bmatrix} -rP & MP \\ PM' & -rP \end{bmatrix} < 0 \quad (5.5b)$$

$$\begin{bmatrix} (MP + PM') \sin \theta & (MP - PM') \cos \theta \\ (PM' - MP) \cos \theta & (MP + PM') \sin \theta \end{bmatrix} < 0. \quad (5.5c)$$

Se essas três LMIs tiverem uma solução, garante-se a \mathcal{D} -estabilidade de M . Lembre-se da Observação 5.1 que se deve garantir a estabilidade das matrizes $A + BK$ e $A + LC$. Então, a alocação de polos será feita separadamente para as duas matrizes, resolvendo-se as LMIs acima primeiro para $M = A + BK$ (controlador) e depois para $M = A + LC$ (observador).

5.2.1 Projeto do controlador

Primeiro, usa-se (5.5) para encontrar uma matriz K tal que os polos de $A + BK$ estejam em uma região desejada. Procedendo-se de modo semelhante ao que foi feito para chegar à

desigualdade (5.2), as desigualdades (5.5) viram:

$$AP_c + BW_c + P_c A' + W_c' B' + 2\sigma P_c \prec 0 \quad (5.6a)$$

$$\begin{bmatrix} -rP_c & AP_c + BW_c \\ P_c A' + W_c' B' & -rP_c \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.6b)$$

$$\begin{bmatrix} (AP_c + BW_c + P_c A' + W_c' B') \sen \theta & (AP_c + BW_c - P_c A' - W_c' B') \cos \theta \\ (P_c A' + W_c' B' - AP_c - BW_c) \cos \theta & (AP_c + BW_c + P_c A' + W_c' B') \sen \theta \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.6c)$$

com $W_c = KP_c$.

5.2.2 Projeto do observador

Agora, fazendo o mesmo para a matriz $A + LC$, similarmente a como foi desenvolvida a desigualdade (5.4):

$$P_o A + W_o C + A' P_o + C' W_o + 2\sigma P_o \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -rP_o & P_o A + W_o C \\ A' P_o + C' W_o & -rP_o \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} (P_o A + W_o C + A' P_o + C' W_o) \sen \theta & (P_o A + W_o C - A' P_o - C' W_o) \cos \theta \\ (A' P_o + C' W_o - P_o A - W_o C) \cos \theta & (P_o A + W_o C + A' P_o + C' W_o) \sen \theta \end{bmatrix} \prec 0,$$

com $W_o = P_o L$, de onde L pode ser encontrada por $L = P_o^{-1} W_o$.

5.3 Estabilidade robusta

Um controlador robusto é um controlador que é capaz de lidar com incertezas na planta. Se alguma característica invariante no tempo for incerta mas estiver dentro de uma faixa de valores conhecida, é ainda possível projetar um controlador para ela usando os conceitos da Seção 3.3.

Suponha que algum componente do sistema tenha uma grandeza física de valor desconhecido, mas que seja sabido que seu valor mínimo é q_1 e seu valor máximo é q_2 . Faz-se então a modelagem do sistema com esses dois extremos: para o valor mínimo, encontra-se uma matriz de estado M_1 , e para o máximo, a matriz M_2 . Suponha ainda que para qualquer valor q intermediário a esses extremos, a matriz de estado encontrada possa ser escrita como $M = \phi M_1 + (1 - \phi) M_2$, para algum $0 \leq \phi \leq 1$. Isso é uma combinação convexa das duas matrizes.

De acordo com o Teorema 3.5, a matriz M como descrita acima é assintoticamente estável se existir uma $P \succ 0$ para a qual $M_1 P + P M_1' \prec 0$ e $M_2 P + P M_2' \prec 0$.

5.3.1 Projeto do controlador

Para projetar um controlador para o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ com $A = \phi A_1 + (1 - \phi) A_2$, deve-se encontrar uma matriz $K = W_c P_c^{-1}$ que satisfaça simultaneamente às duas equações abaixo:

$$A_1 P_c + B W_c + P_c A_1' + W_c' B' \prec 0$$

$$A_2 P_c + B W_c + P_c A_2' + W_c' B' \prec 0$$

Ou seja, basta encontrar um W_c e um P_c que satisfaçam (5.2) para as duas matrizes $A_1 + BK$ e $A_2 + BK$.

Do mesmo modo, projetar um controlador com incerteza e \mathcal{D} -estabilidade pode ser feito encontrando-se um W_c e um P_c que satisfaçam às desigualdades (5.6) tanto para a matriz A_1 quanto para a A_2 .

5.3.2 Nota sobre projeto de observador

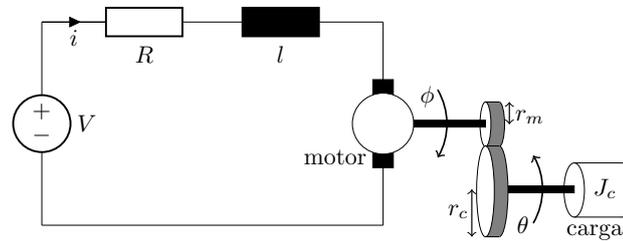
Como no projeto do controlador, projetar um observador poderia ser feito encontrando-se um W_o e um P_o que satisfaçam

$$\begin{aligned} P_o A_1 + W_o C + A_1' P_o + C' W_o' &< 0 \\ P_o A_2 + W_o C + A_2' P_o + C' W_o' &< 0 \end{aligned}$$

Isso garantiria que o observador funcionasse para qualquer matriz de estado que fosse combinação convexa de A_1 e A_2 . Mas existe um problema: toda a teoria foi desenvolvida para que o observador seja construído com a mesma matriz de estado da planta. Se fosse projetada uma matriz L que funcionasse para um sistema cuja matriz de estado da planta é incerta, seria necessário, de qualquer modo, que a matriz de estado do observador fosse modificada para cada sistema diferente onde ele atuaria. Portanto, seria necessário saber no momento da construção do observador quais valores a planta onde ele atuaria possui. Assim, não há sentido tentar implementar um observador com as técnicas desenvolvidas a partir da teoria apresentada neste texto, porque a incerteza teria que ser conhecida no momento do projeto do observador.

6 Exemplo

Figura 6.1: Esquemático do circuito de um motor de corrente contínua.



A Figura 6.1 mostra um motor de corrente contínua acoplado a uma carga, como o modelado em (GEROMEL; KOROGUI, 2011, p. 24). O motor considerado neste exemplo terá as seguintes características:

- ϕ : posição angular da engrenagem do motor em um dado tempo;
- θ : posição angular da engrenagem da carga em um dado tempo;
- i : corrente elétrica no circuito em um dado tempo;
- V : tensão elétrica que alimenta o circuito em um dado tempo;
- $R = 10 \Omega$: resistência do resistor;
- $l = 0,002 \text{ H}$: indutância do indutor;
- $J_c = 0,02 \text{ kg m}^2$: momento de inércia da carga;
- $J_m = 0,005 \text{ kg m}^2$: momento de inércia do rotor;
- $r_c = 4 \text{ cm}$: raio da engrenagem acoplada à carga;
- $r_m = 1 \text{ cm}$: raio da engrenagem acoplada ao rotor;
- $b = 0,02$: coeficiente de atrito viscoso torcional no eixo;
- $k = 0,1 \text{ Nm/A}$: constante de torque do motor;
- $T = ki$: torque total gerado pelo motor.

6.1 Modelagem do sistema

Usando a Lei das Malhas de Kirchhoff (OGATA, 2011, p. 63) e observando o acoplamento entre o circuito elétrico e o motor por meio da constante de torque, o circuito elétrico do motor fornece a equação

$$l \frac{d}{dt} i + Ri = V - k \frac{d}{dt} \phi. \quad (6.1)$$

e a parte mecânica fornece:

$$J_m \frac{d^2}{dt^2} \phi + Fr_m = T \quad (6.2)$$

$$J_c \frac{d^2}{dt^2} \theta + b \frac{d}{dt} \theta = Fr_c, \quad (6.3)$$

onde F é a força na extremidade da engrenagem responsável por gerar o torque. Essa força é fornecida pelo motor e usada pela carga. Assim, a equação (6.2) diz que o torque total gerado pelo motor é suficiente para fazer o próprio motor girar e ainda fornecer um torque (visto como força sobre a extremidade da engrenagem) que pode ser usado para movimentar um outro corpo. A equação (6.3) mostra que o torque total recebido pela carga é igual à força produzida na

extremidade da engrenagem do motor multiplicada pelo raio da engrenagem da carga. Esse torque é igual ao torque que a carga usa para girar somado com o torque perdido com o atrito.

Rotula-se c como a razão entre os raios das duas engrenagens:

$$c = \frac{r_c}{r_m} \quad (6.4)$$

Quando ocorrer uma rotação com velocidade angular ϕ no motor, a carga vai receber essa rotação por meio da engrenagem e a posição angular θ da carga vai depender da razão entre as circunferências das engrenagens, já que elas são acopladas pelas extremidades: quanto maior for a circunferência da engrenagem da carga em relação à do motor, menor será seu deslocamento angular, pois a extremidade terá que percorrer uma distância maior até completar uma rotação. As circunferências, por suas vezes, são proporcionais aos respectivos raios. A posição angular ϕ é então equivalente a θ multiplicado pela razão entre o raio da carga e o raio do motor. Isso pode ser escrito como

$$\phi = \frac{r_c}{r_m} \theta = c\theta, \quad (6.5)$$

a equação (6.2) pode então ser escrita como

$$J_m \frac{d^2}{dt^2} (c\theta) + Fr_m = T. \quad (6.6)$$

Das equações (6.3) e (6.4),

$$F = \frac{1}{cr_m} \left(J_c \frac{d^2}{dt^2} \theta + b \frac{d}{dt} \theta \right).$$

Substituindo esse valor em (6.6):

$$J_m \frac{d^2}{dt^2} (c\theta) + \frac{1}{cr_m} \left(J_c \frac{d^2}{dt^2} \theta + b \frac{d}{dt} \theta \right) r_m = T.$$

Cancelando a multiplicação com a divisão por r_m na segunda parcela e multiplicando toda a equação por c para melhor legibilidade:

$$J_m \frac{d^2}{dt^2} (c^2\theta) + J_c \frac{d^2}{dt^2} \theta + b \frac{d}{dt} \theta = Tc.$$

Por fim, isola-se $\frac{d^2}{dt^2} \theta$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta = \frac{-b \frac{d}{dt} \theta + cki}{J_c + J_m c^2}, \quad (6.7)$$

lembrando que $T = ki$ por definição.

De (6.1) e (6.5):

$$l \frac{d}{dt} i = V - Ri - ck \frac{d}{dt} \theta,$$

e resta apenas isolar a derivada da corrente:

$$\frac{d}{dt} i = \frac{1}{l} \left(V - Ri - ck \frac{d}{dt} \theta \right). \quad (6.8)$$

Utilizando (6.8) e (6.7), pode-se montar as equações do sistema como em (1.1):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J_c + J_m c^2} & \frac{ck}{J_c + J_m c^2} \\ -\frac{ck}{l} & -\frac{R}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} u, \quad (6.9)$$

com $x_1 = \frac{d}{dt}\theta$, $x_2 = i$ e $u = V$.

Atribuindo os valores como listados no começo desta seção, essas equações ficam:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,200 & 4,000 \\ -200,000 & -5000,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 500,000 \end{bmatrix} u. \quad (6.10)$$

6.2 Projeto de controlador e observador

Considere o problema de fazer o controle da velocidade x_1 da carga acoplada ao motor. Mas suponha que não seja possível medir essa velocidade diretamente, de modo que ela deverá ser estimada apenas por meio da observação da corrente x_2 (veja na equação (6.9) que a corrente e a velocidade da carga são as duas variáveis de estado do sistema).

Observe ainda que falta uma equação para completar as equações do espaço de estados como em (1.1). A primeira, que descreve o estado, é a própria (6.10). A segunda descreve a saída. Antes de escrevê-la, é necessário decidir qual das variáveis de estado será a saída¹. Como se está supondo que não se pode medir x_1 , é conveniente que x_2 seja a saída. Assim, a equação ficará:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

As equações (6.10) e (6.11) mostram que o sistema tem então uma matriz de estado A , uma matriz de entrada B e uma matriz de saída C como segue:

$$A = \begin{bmatrix} -0,200 & 4,000 \\ -200,000 & -5000,000 \end{bmatrix} \quad (6.12a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 500,000 \end{bmatrix} \quad (6.12b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12c)$$

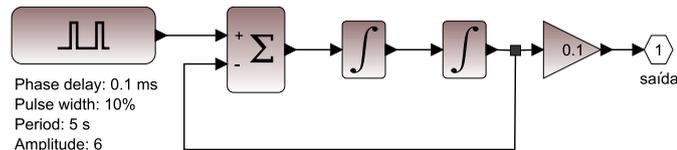
A seguir, serão feitos o projeto de controlador e observador para esse sistema por meio do LMISol e a simulação por meio do Scilab. Para informações sobre essas duas ferramentas, consulte o Apêndice A.

Para fazer a simulação, a tensão de referência será fixada em 1 V. As condições iniciais do sistema serão sempre $x_1(0) = 8$ e $x_2(0) = 8$. O fato de essas condições não serem nulas simula uma situação em que o motor acabou de ser desligado e é ligado novamente, de modo que ainda havia uma rotação e uma medição de corrente; ou também a situação em que existe uma perturbação no momento em que o motor é ligado. Do lado do observador, as simulações serão sempre feitas com $\hat{x}_1(0) = 0$ e $\hat{x}_2(0) = 0$. Os valores escolhidos não são tão importantes e pretendem apenas levar o exemplo para um caso menos trivial, fazendo as condições iniciais da planta serem diferentes das do observador. Se fossem iguais, cada variável estimada seria sempre igual à sua correspondente real e o exemplo seria menos interessante.

¹ É comum que a saída seja uma das variáveis de estado, embora o formato das equações permita que ela seja uma combinação linear de várias variáveis.

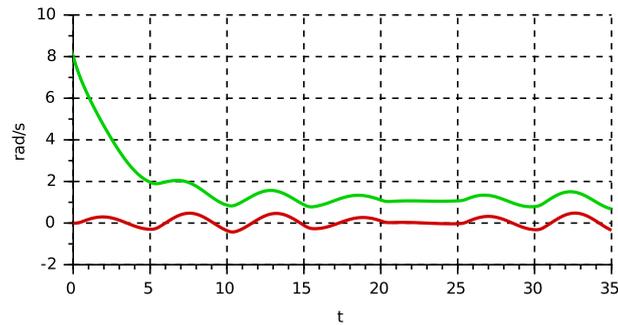
Para mostrar o efeito do controlador na anulação de distúrbios, será aplicado um sinal de distúrbio na velocidade angular da carga. Esse sinal simula um agente externo atuando de maneira imprevisível sobre o sistema (por exemplo, o vento ou uma corrente de água). O sinal é gerado no Scilab pelo esquemático mostrado na Figura 6.2. O sinal será mostrado juntamente com os gráficos da simulação do sistema.

Figura 6.2: Esquemático de gerador de distúrbio, desenhado no Scilab.



A simulação da velocidade da carga para a planta em malha aberta com o distúrbio como descrito acima é mostrada na Figura 6.3. Observe que o distúrbio é somado à velocidade angular da carga. O objetivo do projeto de controlador feito adiante será fazer que a velocidade angular da carga se mantenha constante apesar do distúrbio.

Figura 6.3: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e distúrbio (vermelho) para a planta em malha aberta.



6.2.1 Estabilidade assintótica

O problema a ser resolvido nesta seção será projetar um controlador com realimentação de estado estimado que funcione, sem preocupação com tempo de acomodação, overshoot, etc.

Como mostrado na Seção 5.1, isso deve ser feito encontrando-se matrizes $K = W_1 P_1^{-1}$ e $L = P_2^{-1} W_2$ para as quais

$$AP_1 + BW_1 + P_1 A' + W_1' B' \prec 0$$

$$P_2 A + W_2 C + A' P_2 + C' W_2' \prec 0,$$

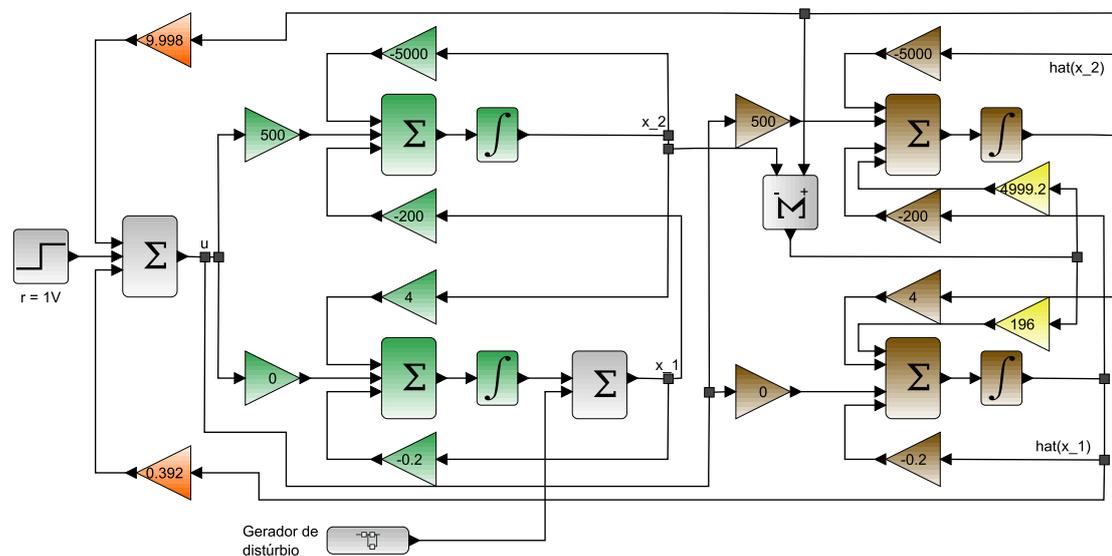
com A , B e C descritas em (6.12) para este sistema.

A solução dessas desigualdades via LMISol, com código no Algoritmo B.1 (página 60), fornece:

$$K = \begin{bmatrix} 0,392 & 9,998 \end{bmatrix}$$

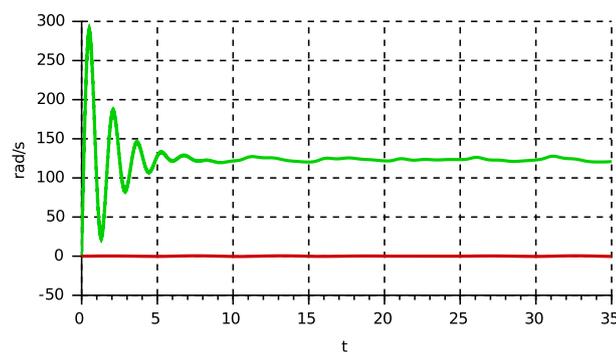
$$L = \begin{bmatrix} 196,000 \\ 4999,200 \end{bmatrix}$$

Figura 6.4: Diagrama do Scilab mostrando a planta (verde), o observador (marrom e amarelo) e o controlador (laranja).



A Figura 6.4 mostra como fica no Scilab o projeto de um observador e controlador para o sistema, no modelo mostrado na Figura 4.1. Na figura, os rótulos x_1 e x_2 denotam x_1 e x_2 , e $\text{hat}(x_1)$ e $\text{hat}(x_2)$ denotam \hat{x}_1 e \hat{x}_2 . Observe que as entradas da matriz K encontrada acima aparecem multiplicando os estados estimados para fazer a realimentação (em laranja na figura). Observe também que o observador é um clone da planta e a única diferença é que o observador inclui uma realimentação que usa o erro de estimação, que é multiplicado pelas entradas da matriz L encontrada acima (mostradas em amarelo na figura).

Figura 6.5: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e do distúrbio (vermelho) no projeto com estabilidade assintótica.

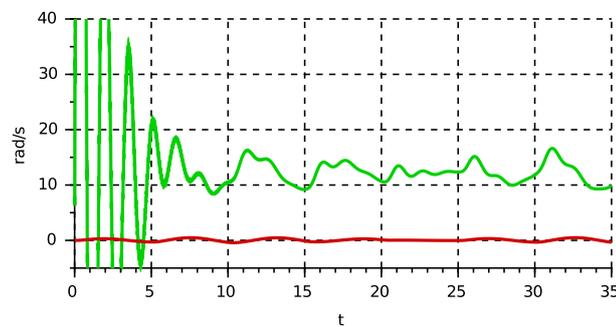


A Figura 6.5 mostra o gráfico da velocidade angular da carga simulada conforme o desenho na Figura 6.4. Observe que a velocidade continuou sofrendo a presença de distúrbios e eles ainda foram amplificados devido a ação retroativa exercida pelo controlador e aos ganhos fornecidos por ele. O distúrbio fez a velocidade angular atingir valores entre 120 rad/s e 128 rad/s. Na ausência completa de distúrbios, a velocidade angular estacionária teria sido 123,5 rad/s, como foi descoberto em uma outra simulação (não mostrada neste texto). Isso fornece um erro de 3,5%, que pode ser considerado baixo dependendo da aplicação. Mas observando que o distúrbio

supostamente causaria uma mudança na velocidade de no máximo 0,5 rad/s para mais ou para menos, obter uma diferença de 4,5 rad/s é um tanto significativo.

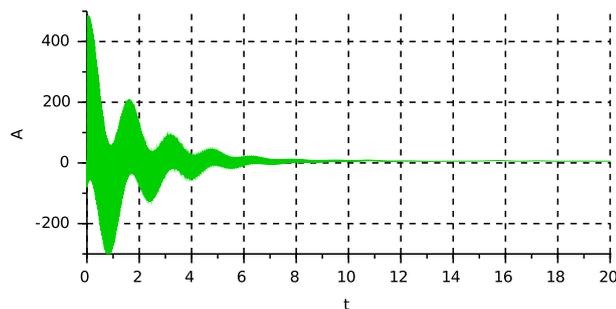
Embora o erro de 3,5% seja relativamente pequeno, esse projeto se mostra inútil para atenuar distúrbios no caso onde fosse desejada uma baixa velocidade na saída. Ao dividir a referência por 10 com o intuito de deixar a velocidade angular da carga em 12,35 rad/s, o que se obteve foi uma velocidade oscilando entre 9 rad/s e 17 rad/s, como mostra a Figura 6.6. A amplitude dessa oscilação é a mesma que antes, mas como agora a saída nominal é menor, a oscilação causa um erro demasiadamente alto em proporção. E quanto menor for a velocidade angular desejada, mais esse problema se agrava.

Figura 6.6: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e do distúrbio (vermelho) para uma referência $r = 0,1\text{ V}$ no projeto com estabilidade assintótica.



Para resolver isso, seria necessário projetar um sistema com menor tempo de acomodação, que conseguisse anular mais rapidamente os sinais indesejados. Isso será resolvido na próxima seção, com \mathcal{D} -estabilidade.

Figura 6.7: Simulação da corrente no projeto com estabilidade assintótica.

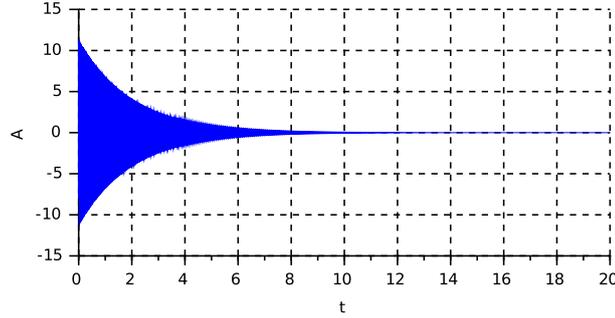


A Figura 6.7 mostra a corrente no circuito. A frequência do sinal é 30 Hz. A corrente estaciona em 6 A por volta de $t = 10$, mas segue oscilando entre 4 A e 8 A por causa do distúrbio.

A Figura 6.8 mostra o erro de estimação da corrente, que é o sinal $\hat{x}_2 - x_2$. A frequência de oscilação da curva é 100 Hz

6.2.2 \mathcal{D} -estabilidade

Para as matrizes K e L encontradas na seção anterior, os polos do controlador são $-0,6 \pm 4j$ e os do observador são $-0,6 \pm 200j$. Agora, será usada a teoria desenvolvida na

Figura 6.8: Simulação do erro de estimação da corrente no projeto com estabilidade assintótica.

Seção 5.2 para colocar esses polos em alguma outra posição.

Para este exemplo, suponha que se deseje que os polos do controlador tenham parte real menor do que -20 . Suponha também querer-se limitar o argumento dos polos a 60° e o módulo a 40. Como na equação (5.6), isso deve ser feito encontrando-se uma matriz $K = W_c^{-1}P_c$ para a qual

$$AP_c + BW_c + P_cA' + W_c'B' + 2 \times 20 \times P_c \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} -40P_c & AP_c + BW_c \\ P_cA' + W_c'B' & -40P_c \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} (AP_c + BW_c + P_cA' + W_c'B') \sin 60^\circ & (AP_c + BW_c - P_cA' - W_c'B') \cos 60^\circ \\ (P_cA' + W_c'B' - AP_c - BW_c) \cos 60^\circ & (AP_c + BW_c + P_cA' + W_c'B') \sin 60^\circ \end{bmatrix} \prec 0,$$

onde A , B e C são as matrizes do sistema, dadas em (6.12), e P_c e W_c são as incógnitas.

O código para resolver essas LMIs no LMISol está nas linhas 20 a 24 do Algoritmo B.2.

É recomendado que os polos do observador sejam dez vezes maiores que os do controlador (RADISAVLJEVIC-GAJIC, 2015). Para atender a isso, será projetado um observador cujos polos tenham parte real menor do que -400 . Seu módulo estará limitado a 500. Para isso, deve-se encontrar uma matriz $L = P_o^{-1}W_o$ para a qual

$$P_oA + W_oC + A'P_o + C'W_o + 2 \times 400 \times P_o \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} -500P_o & P_oA + W_oC \\ A'P_o + C'W_o & -500P_o \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} (P_oA + W_oC + A'P_o + C'W_o') \sin 60^\circ & (P_oA + W_oC - A'P_o - C'W_o') \cos 60^\circ \\ (A'P_o + C'W_o' - P_oA - W_oC) \cos 60^\circ & (P_oA + W_oC + A'P_o + C'W_o') \sin 60^\circ \end{bmatrix} \prec 0.$$

O código para resolver essas LMIs no LMISol está nas linhas 42 a 46 do Algoritmo B.2.

Resolvendo-se as LMIs, encontra-se:

$$K = \begin{bmatrix} -0,020 & 9,914 \end{bmatrix}$$

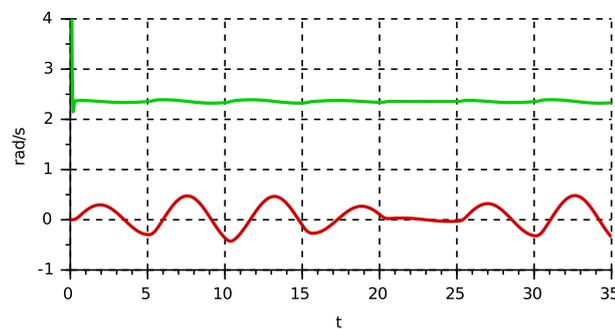
$$L = \begin{bmatrix} 1118,191 \\ 4129,997 \end{bmatrix},$$

e agora os autovalores de $A + BK$ são $-21,592 \pm 19,528j$ e os de $A + LC$ são $-435,101 \pm 187,880j$.

De posse das matrizes K e L , pode-se atualizar os valores do diagrama da Figura 6.4 no Scilab e fazer uma nova simulação.

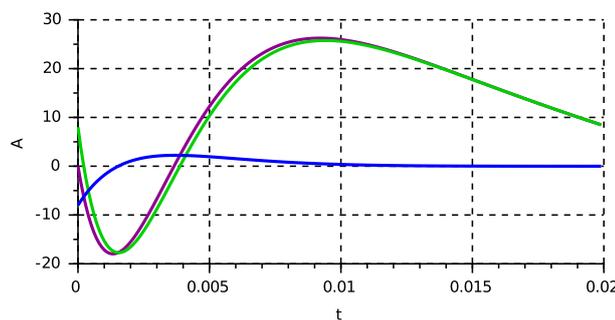
A simulação da velocidade da carga está mostrada na Figura 6.9. É possível perceber que se obteve um tempo de resposta muito menor e um overshoot muito menor do que aqueles obtidos anteriormente. O sinal começa, como sempre, como $x(0) = 8$, pelas condições iniciais definidas. O sinal decresce e em $t = 0,18$, o sinal sofre um overshoot e vai até $2,15$ rad/s. Ele se recupera totalmente em $t = 0,35$, quando entra em regime estacionário, sem ter sofrido oscilações. Seu valor estacionário na ausência de perturbações seria $2,36$ rad/s.

Figura 6.9: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e do distúrbio (vermelho) para o projeto com \mathcal{D} -estabilidade.

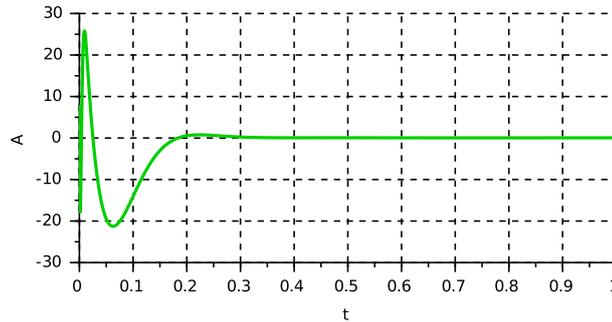


É possível perceber que esse controlador atenuou muito o sinal de distúrbio. A velocidade angular da carga ficou entre $2,32$ rad/s e $2,39$ rad/s. O distúrbio oscila entre $0,5$ rad/s e $-0,5$ rad/s. Assim, nota-se que apenas 8% do distúrbio foi efetivamente somado à variável. Esse resultado é bem melhor que o obtido na seção anterior, onde 800% da amplitude da perturbação acabava sendo somado ao sinal.

Figura 6.10: Simulação da corrente real (verde), estimada (roxo) e da diferença entre elas (azul) para o projeto com \mathcal{D} -estabilidade.



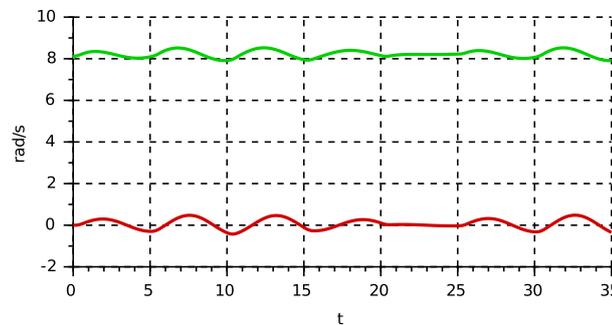
A Figura 6.10 mostra a corrente real e a corrente estimada nos primeiros $0,02$ segundos de simulação. Como definido, a corrente real se inicia com o valor $x_2(0) = 8$ e a estimada com $\hat{x}_2(0) = 0$. A diferença entre as duas correntes passa a ser desprezível a partir de $t = 0,02$, onde é menor que $0,002$ A e a amplitude do erro apenas decresce. Mas as correntes propriamente ditas ainda mudam bastante. A Figura 6.11 mostra o que acontece até a corrente entrar em regime estacionário, o que ocorre por volta de $t = 0,3$ s. Nota-se que o observador consegue estimar a corrente satisfatoriamente mesmo bem antes de ela entrar em regime estacionário.

Figura 6.11: Simulação da corrente no primeiro 1 s para o projeto com \mathcal{D} -estabilidade.

6.2.3 Estabilidade robusta

A constante de torque do motor foi definida no começo deste capítulo como $k = 0,1 \text{ N m/A}$. Suponha agora que exista uma incerteza nesse valor e que se saiba que ele pode ser no mínimo $k_1 = 0,02 \text{ N m/A}$ e no máximo $k_2 = 0,1 \text{ N m/A}$.

Se for utilizado o mesmo controlador projetado na Seção 6.2.2 para $k = k_1$, o sistema deixa de atenuar o distúrbio tão bem quanto antes, como mostra a Figura 6.12.

Figura 6.12: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e perturbação (vermelho) no projeto com \mathcal{D} -estabilidade com constante de torque do motor modificado para $0,02 \text{ N m/A}$.

Para conseguir um controlador tão eficiente para $k = k_1$ quanto para $k = k_2$, pode-se usar os conceitos mostrados na Seção 5.3.

Usando k_1 para calcular a matriz de estado A_1 e k_2 para calcular a matriz de estado A_2 , obtém-se:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,200 & 4,000 \\ -200,000 & -5000,000 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0,200 & 0,800 \\ -40,000 & -5000,000 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz de estado A que seja calculada com k igual a algum número entre k_1 e k_2 pode ser escrita como combinação convexa das matrizes A_1 e A_2 . Então, de acordo com a Seção 5.3, pode-se projetar um controlador que funcione com qualquer matriz A sendo combinação convexa

de A_1 e A_2 encontrando-se uma $K = W_c P_c^{-1}$ que satisfaça simultaneamente

$$A_1 P_c + B W_c + P_c A_1' + W_c' B' + 2 \times 20 \times P_c \prec 0 \quad (6.17a)$$

$$A_2 P_c + B W_c + P_c A_2' + W_c' B' + 2 \times 20 \times P_c \prec 0 \quad (6.17b)$$

com $P_c \succ 0$, onde foi ainda exigido que a parte real dos polos seja inferior a -20 , para que esse controlador tenha um tempo de acomodação tão bom quanto ou inferior ao controlador projetado na Seção 6.2.2, que funciona bem para $A = A_1$.

Resolvendo (6.17), encontra-se:

$$K = \begin{bmatrix} -15,097 & 9,466 \end{bmatrix}.$$

O código para resolução no LMISol está no Algoritmo B.3.

Figura 6.13: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e distúrbio (vermelho) no projeto robusto com constante de torque do motor igual a $0,02 \text{ N m/A}$.

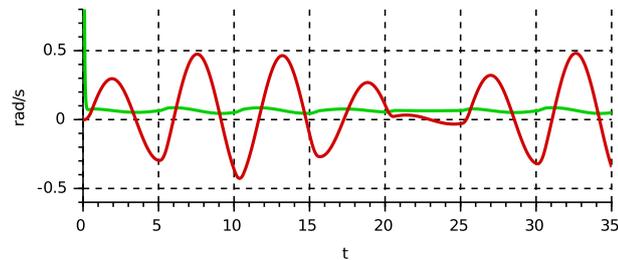


Figura 6.14: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e distúrbio (vermelho) no projeto robusto com constante de torque do motor igual a $0,1 \text{ N m/A}$.

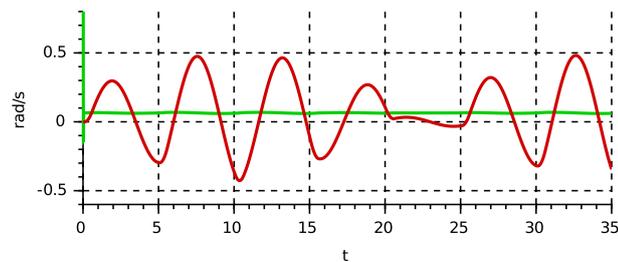
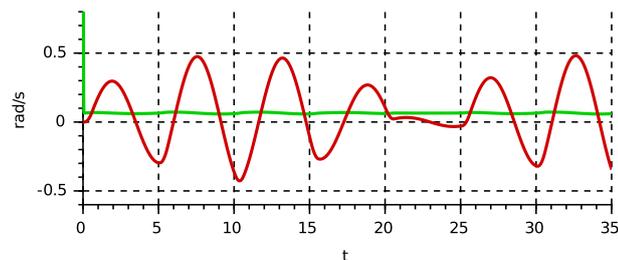


Figura 6.15: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e distúrbio (vermelho) no projeto com incerteza com constante de torque do motor igual a $0,06 \text{ N m/A}$.



Usar esse controlador para A_1 fornece uma velocidade angular da carga como mostrado em Figura 6.13. Para A_2 , o resultado está mostrado em Figura 6.14. Para $\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$, a simulação é mostrada em Figura 6.15. As figuras mostram que se obteve uma atenuação de distúrbio muito

boa nos três casos. Agora, o mesmo projeto pode ser usado para o intervalo de valores onde reside a incerteza.

Parte III
Comentários

7 Considerações finais

7.1 Uso do método

Projetar controladores com realimentação de estado foi indubitavelmente benéfico em alguns dos casos mostrados neste trabalho como exemplos. Foi possível observar que as perturbações sofridas pelo sistema mecânico simulado foram satisfatoriamente atenuadas após a inserção de sistemas de controle. O fato de se ter usado estados estimados em vez de estados reais não mostrou nenhum prejuízo: depois de um primeiro período de tempo, os estados estimados e reais já eram, para todos os efeitos, iguais. Mesmo com a presença de distúrbios, os estimadores funcionaram suficientemente bem.

Usar desigualdades matriciais lineares para resolver problemas de Engenharia de Controle se mostrou um método muito direto. Isso pode ser evidenciado com o fato de as seções de exemplos de projetos de controladores terem ficado praticamente desprovidas de cálculos: tudo o que se precisou fazer foi copiar as fórmulas obtidas na parte teórica, atualizar seus valores, e resolvê-las via software.

O fato de ser um método direto pode ser muito conveniente para, por exemplo, fazer alterações em um mesmo sistema e projetar controladores repetidas vezes. Mas é preciso alguma cautela: como a ferramenta de solucionar LMIs entrega apenas uma solução dentre uma infinidade de soluções que podem existir, o projetista acaba por perder a possibilidade de fazer análise e decidir por controladores que se encaixariam melhor para o caso especial que ele estiver projetando. Com LMIs, não se vê exatamente o que está acontecendo com o sistema para que os controles projetados funcionem. Então, é recomendado ter um pouco de cuidado e reservar algum tempo para considerar se os controladores projetados são realmente adequados.

Este método, todavia, mostra-se particularmente interessante para projetos que envolvam sistemas de ordem grande, onde os métodos analíticos poderiam ficar demasiadamente complicados ou exaustivos. Embora os exemplos dados tenham se limitado à ordem 2, a teoria contida neste texto se verifica para matrizes de qualquer tamanho. Os algoritmos de solução de LMIs também são suficientemente eficientes e o tempo que eles levam para resolver um certo problema dificilmente é uma preocupação.

Nota-se ainda que durante todo o texto foram considerados apenas sistemas que sejam completamente controláveis e observáveis; nem todos os sistemas o são. (OGATA, 2011, seções 9.6 e 9.7) mostra métodos para se saber previamente se um sistema é controlável (a partir de suas matrizes de estado e de entrada) e observável (a partir de suas matrizes de estado e de saída). Ele observa que sistemas que não são controláveis possuem um subsistema que é fisicamente desconectado da entrada. Ele também informa que o sistema é observável e controlável se e somente se sua função de transferência não contiver cancelamentos, ou seja, se seu denominador e numerador não tiverem fatores comuns. Haver cancelamento na função de transferência indica que há alguma perda de informação sobre a dinâmica do sistema.

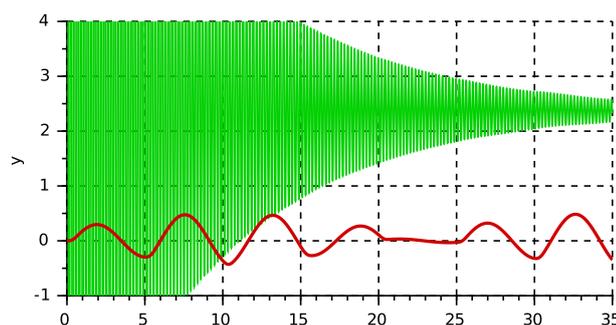
7.2 Possível implementação prática

Os resultados mostrados neste trabalho funcionam bem para fins de simulação, mas desprezam fatores que seriam muito relevantes em uma possível implementação real. Por exemplo, precisariam ser consideradas a aplicação onde o sistema seria usado e as características dos componentes que seriam utilizados para construir o sistema para saber qual seria a maior frequência natural que poderia ser admitida, qual tempo de acomodação o sistema deveria ter, qual seria o maior overshoot que não traria danos, etc.

Uma outra preocupação na implementação seria a presença de ruídos. Quando se tenta diminuir o tempo de resposta de um sistema aumentando-se o módulo das partes reais de seus polos, o sistema fica também mais vulnerável a ruídos, porque sua frequência natural aumenta. Os ruídos geralmente surgem nos sensores ou entram no sistema por meio de alguma interferência externa. Seria necessário então fazer um estudo sobre quão tolerante a ruídos o sistema obtido deve ser para que ele funcione satisfatoriamente. Como os polos do sistema não podem ser arbitrariamente grandes em módulo, pode ser que alguns projetos feitos neste texto, que teoricamente funcionam, sejam inviáveis na prática.

Outro fator de importante consideração seriam os erros (de acurácia, resolução, etc) produzidos pelos componentes do controlador responsáveis por aplicar ganho ao sinal e os erros provenientes dos sensores. Por causa da propagação de erros, uma pequena diferença nesse valor pode fazer muita diferença no resultado final. Veja na Figura 7.1 o que teria acontecido na simulação da velocidade angular da carga com \mathcal{D} -estabilidade (Seção 6.2.2) se tivesse sido usado $K_{(1,2)} = 10,000$ em vez de $K_{(1,2)} = 9,914$. Compare essa figura com a Figura 6.9 para ver a diferença enorme que um erro inferior a 1% causou.

Figura 7.1: Simulação da velocidade angular da carga (verde) e do distúrbio (vermelho) para o projeto com \mathcal{D} -estabilidade com um erro inserido no controlador.



7.3 Projeto robusto

Os controladores robustos foram mostradas neste trabalho mais como uma ilustração da facilidade e maleabilidade das LMIs do que como uma forma de resolver problemas de Controle. Isso porque a teoria mostrada aqui deixa algumas questões em aberto e não são suficientes para se fazer controle com estado estimado, apesar de o projeto de controle robusto ter funcionado muito bem no caso específico do exemplo. Na prática, fazer um controlador robusto é uma tarefa bem mais complexa e requer um estudo teórico mais avançado. Um método de projeto de controle

robusto com realimentação de estado estimado para sistemas lineares é descrito em (LIEN, 2004), onde também se utiliza LMI para resolver os problemas.

7.4 Sugestões de pesquisa

Ao leitor que tenha interesse, sugere-se reproduzir os exemplos de simulação mostrados e continuar os testes e a pesquisa para levantar respostas para perguntas que não foram abordadas neste trabalho:

- Se o distúrbio fosse na corrente e não na carga, como o sistema se comportaria?
- E se houvesse distúrbio tanto na corrente quanto na carga?
- Como o sistema se comportaria com perturbações de diferentes frequências?
- Como se comportaria um motor intermitente?
- Como atrasos no sinal de controle afetariam o sistema?
- Como erros nos componentes de uma implementação real afetariam o sistema?
- Como ruídos vindos do sensor de corrente afetariam o sistema e como isso se agravaria com o afastamento dos polos do eixo imaginário?
- Como ficariam as simulações se o ganho da referência fosse ajustado para que o valor numérico da saída seja sempre igual ao da referência? ¹
- Os observadores projetados possuem variáveis redundantes, porque eles estimam uma variável cuja correspondente real está disponível para leitura. Como eliminar essa redundância e que vantagens isso traria?
- A presença de distúrbios faz o motor passar a se comportar como um gerador e induzir corrente no circuito. No exemplo dado, a corrente induzida ficou pequena demais para ser percebida. Mas como isso poderia afetar o sistema?
- Como o consumo de energia muda em consequência da inserção de um controlador? E em consequência da mudança de polos?

7.5 Trabalhos relacionados

- **Controle robusto H_2 aplicado ao pêndulo invertido sujeito a incertezas** (ROSA FILHO, 2015): Investiga o problema do pêndulo invertido com incertezas politópicas na massa a fim de estabilizar o sistema considerando como critério de desempenho a sua norma H_2 . São usadas LMIs para formular os problemas. O trabalho mostra simulações no MATLAB/SIMULINK que comparam o controle H_2 com a técnica de controle LQR (regulador linear quadrático).
- **Velocity tracking control for a separately excited DC motor without velocity measurements** (BURG et al., 1994): Usa técnicas de controle avançadas para projetar um controlador e um observador não lineares para um motor de corrente contínua para que seja feito o controle do sistema sem que seja necessário um sensor de velocidade. Os resultados obtidos são verificados experimentalmente.

¹ Instruções em (GEROMEL; KOROGUI, 2011, p. 173-179).

Apêndices

APÊNDICE A – Ferramentas utilizadas

A.1 LMISol

O LMISol é uma ferramenta desenvolvida no Laboratório de Análise Convexa da Universidade de Campinas em 1997 (OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997).

Os comandos do LMISol usados neste trabalho são mostrados abaixo em forma de exemplos.

- Inicializar uma variável c com o valor 5:

```
c = 5
```

- Calcular $c \times M1 + M2 \times M3$, sendo c um escalar e $M1, M2, M3$ matrizes:

```
c*M1 + M2*M3
```

- Inicializar uma matriz M igual a $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$:

```
M = [3 4 ; 1 5]
```

- Declarar uma matriz X de tamanho 1×2 sem valor inicial:

```
var X(1,2)
```

- Montar uma matriz de bloco simétrica $M = \begin{bmatrix} A & C' \\ C & D \end{bmatrix}$:

```
block(A; C, D)
```

- Obter a transposta da matriz M :

```
M'
```

- Obter a inversa da matriz M :

```
inv(M)
```

- Definir que a equação $X + Y = 0$ deve ser satisfeita:

```
lme = X+Y
```

- Definir que a desigualdade $X + Y \prec 0$ deve ser satisfeita:

```
lmi = -(X+Y)
```

- Definir a função objetiva (função que é minimizada) como o traço da matriz X :

```
obj = trace(X)
```

- Resolver a LMI com as restrições previamente definidas:

`solve`

Para resolver uma LMI da forma $MX + XM' \prec 0$ onde $X \succ 0$ é a variável a ser encontrada, deve ser feito:

- Inicializar a matriz M com os valores de suas entradas;
- Declarar uma variável X com as mesmas dimensões de M ;
- Definir que X deve ser simétrica:
`lme = X - X'`
- Definir que X deve ser positiva definida:
`lmi = X`
- Definir que $MX + XM'$ deve ser negativa definida:
`lmi = -(MX + XM')`
- Definir uma função objetiva, por exemplo, exigindo que o traço da matriz X seja o maior possível:
`obj = - trace(X)`
- Resolver o sistema:
`solve`
- Consultar a variável X , que contém a solução:
`X`

A.2 Scilab

O Scilab é uma ferramenta de código aberto para computação numérica. Neste trabalho, foi usada a versão 5.5.2 de março de 2015 para Linux 64 bits, executando sob o sistema operacional Ubuntu 16.04.

Uma das funcionalidades do Scilab é o Xcos, que é um editor gráfico que permite desenhar e simular sistemas dinâmicos. Ele foi aqui usado para simular sistemas a partir de suas equações do espaço de estados. Essa simulação permite escolher qualquer sinal do sistema para ser exibido em um gráfico.

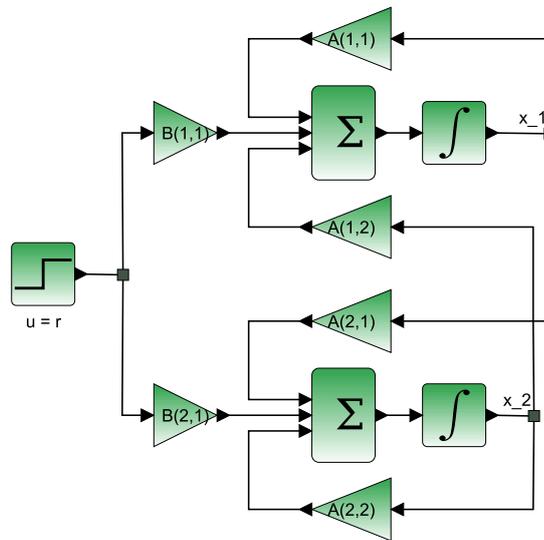
Uma das formas de fazer essa simulação é desenhando um diagrama do sistema, o que pode ser feito sem dificuldade a partir das equações do espaço de estados. Por exemplo, o sistema que tem as equações

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ A(2,1) & A(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(1,1) \\ B(1,2) \end{bmatrix} u. \quad (\text{A.1a})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1b})$$

pode ser desenhado no Scilab como o diagrama de blocos da Figura A.1. Nessa figura, a entrada u é igual à referência r , que vem de um bloco que gera um sinal constante. As variáveis x_1 e x_2 estão indicadas por x_1 e x_2 . Os blocos triangulares fornecem um ganho ao sinal; o valor do ganho é mostrado dentro do bloco. Os blocos com o símbolo \int fornecem a integral do sinal. O bloco com o símbolo Σ tem como saída a soma todos os sinais que entram nele. As setas pretas indicam as direções dos sinais. Um quadrado preto pequeno indica que todas as linhas que passam por ele carregam o mesmo sinal; ao contrário, quando duas linhas apenas se cruzam, cada uma tem um sinal diferente.

Figura A.1: Diagrama do Scilab mostrando uma planta genérica em conformidade com a equação (A.1).



APÊNDICE B – Algoritmos para resolução de LMIs

Algoritmo B.1 Projeto com estabilidade assintótica

```

1  A = [ -0.20  4    ; -200 -5000 ]
2  B = [ 0    ; 500]
3  C = [ 0  1 ]
4
5
6  // Projeto do controlador:
7
8  var Xc(2,2)
9  var Wc(1,2)
10
11 lme = Xc-Xc'
12 lmi = Xc
13 lmi = - (A*Xc + Xc*A' + B*Wc + Wc'*B')
14 obj = - trace(Xc)
15
16 solve
17
18 K = Wc*inv(Xc)
19
20
21 // Projeto do observador:
22
23 var Xo(2,2)
24 var Wo(2,1)
25
26 lme = Xo-Xo'
27 lmi = Xo
28 lmi = - (A'*Xo + Xo*A + Wo*C + C'*Wo')
29 obj = - trace(Xo)
30
31 solve
32
33 L = inv(Xo)*Wo

```

Algoritmo B.2 Projeto com \mathcal{D} -estabilidade

```

1  A = [ -0.20  4 ; -200 -5000]
2  B = [ 0 ; 500]
3  C = [ 0 1 ]
4
5  a = 0.866 // seno de 60 graus
6  b = 0.5   // cosseno de 60 graus
7
8
9  // Projeto do controlador:
10
11  sigma_c = 20
12  r_c = 40
13
14  var Xc(2,2)
15  var Wc(1,2)
16
17
18  lme = Xc-Xc'
19  lmi = Xc
20  lmi = - (A*Xc + Xc*A' + B*Wc + Wc'*B' + 2*sigma_c*Xc)
21  lmi = block(r_c*Xc; -Xc*A'-Wc'*B' , r_c*Xc)
22  lmi = block(-a*(A*Xc + B*Wc + Xc*A' + Wc'*B'));
23           -b*(Xc*A'+ Wc'*B'- A*Xc - B*Wc ),
24           -a*(A*Xc + B*Wc + Xc*A' + Wc'*B'))
25  obj = - trace(Xc)
26
27  solve
28
29  K = Wc*inv(Xc)
30
31
32  // Projeto do observador:
33
34  sigma_o = 400
35  r_o = 500
36
37  var Xo(2,2)
38  var Wo(2,1)
39
40  lme = Xo-Xo'
41  lmi = Xo
42  lmi = - (A'*Xo + Xo*A + Wo*C + C'*Wo' + 2*sigma_o*Xo)
43  lmi = block(r_o*Xo; -A'*Xo-C'*Wo' , r_o*Xo)
44  lmi = block(-a*(A'*Xo + Xo*A + Wo*C + C'*Wo'));
45           -b*(+A'*Xo - Xo*A - Wo*C + C'*Wo'),
46           -a*(A'*Xo + Xo*A + Wo*C + C'*Wo'))
47  obj = - trace(Xo)
48
49  solve
50
51  L = inv(Xo)*Wo

```

Algoritmo B.3 Projeto de controlador robusto

```
1 A1 = [ -0.20  0.8 ; -40 -5000]
2 A2 = [ -0.20  4 ; -200 -5000]
3 B = [ 0 ; 500]
4 C = [ 0 1 ]
5
6 sigma = 20
7
8
9 var X(2,2)
10 var W(1,2)
11
12 lme = X-X'
13 lmi = X
14 lmi = - (A1*X + X*A1' + B*W + W'*B' + 2*sigma*X)
15
16 lme = X-X'
17 lmi = X
18 lmi = - (A2*X + X*A2' + B*W + W'*B' + 2*sigma*X)
19
20 obj = - trace(X)
21
22 solve
23
24 K = W*inv(X)
```

APÊNDICE C – Conceitos básicos

C.1 Álgebra matricial

Estão enunciados aqui os conceitos de álgebra matricial que são importantes neste trabalho¹.

Um escalar λ é um **autovalor** (também chamado de “valor próprio”) da matriz quadrada M se existir um vetor v não nulo tal que $Mv = \lambda v$. O vetor v então é chamado de **autovetor** correspondente a λ .

A **matriz adjunta** de uma matriz quadrada $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz $\text{adj}(M) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ onde cada termo $\text{adj}(M)_{(i,j)}$ é o valor do determinante da submatriz de M que é obtida com a remoção da linha i e da coluna j , ainda multiplicado pelo número $(-1)^{i+j}$. Por exemplo, para uma matriz de tamanho 2×2 , obtém-se a adjunta (ANTON; RORRES, 2011, p. 93)

$$\text{adj}(M) = \begin{bmatrix} M(2,2) & -M(1,2) \\ -M(2,1) & M(1,1) \end{bmatrix}.$$

O **menor principal líder** de ordem k de uma matriz quadrada $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é o determinante da submatriz de M resultante da eliminação das suas últimas $n - k$ linhas e $n - k$ colunas. Assim, o menor principal líder de ordem k de $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $n \geq k$ é o determinante de

$$\begin{bmatrix} M(1,1) & M(1,2) & \dots & M(1,k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M(k,1) & M(k,2) & \dots & M(k,k) \end{bmatrix}.$$

Propriedade C.1: Um número complexo λ é um autovalor da matriz M se e somente se $\det(\lambda I - M) = 0$. (ANTON; RORRES, 2011, p. 240)

Propriedade C.2: $M^{-1} = \frac{\text{adj}(M)}{\det(M)}$. (ANTON; RORRES, 2011, p. 93)

Propriedade C.3: Uma matriz é invertível se e somente se seu determinante for diferente de zero. (ANTON; RORRES, 2011, p. 87)

Propriedade C.4: O produto dos autovalores de uma matriz M é igual ao determinante de M .

Propriedade C.5: Se uma matriz real M for simétrica, então todos os autovalores de M são reais (ZWICK, 2012).

¹ Conceitos fundamentais de álgebra matricial, como soma e multiplicação de matrizes, determinantes, matrizes inversas, etc, podem ser consultados em (ANTON; RORRES, 2011).

C.2 Engenharia de Controle

Um **projeto de controle** é um termo genérico usado para designar qualquer projeto cujo intuito é reger o comportamento de algum sistema físico.

Planta é qualquer sistema físico para o qual faça sentido ser feito um projeto de controle. Por exemplo, podem ser consideradas plantas uma turbina de aeronave, a aeronave inteira, uma caixa de som ou um aparelho de ar condicionado.

Sistema é como é chamado qualquer conjunto formado por uma planta e por eventuais componentes adicionais que permitam que seja feito seu controle.

Distúrbio ou **perturbação** é qualquer ação que pode afetar o sistema de maneira imprevisível. Um exemplo de distúrbio é o vento, por causa de sua natureza imprevisível e sua capacidade de afetar sistemas mecânicos.

Ruído, em Eletrônica, é uma corrente ou tensão indesejada que afeta a precisão dos sinais de maneira aleatória.

Estado (ou **vetor de estados**), rotulado com a letra \mathbf{x} , é um conjunto de medidas (chamadas de **variáveis de estado**) que descrevem completamente o sistema em um dado tempo.

Saída é alguma variável de estado do sistema (ou uma combinação linear de algumas variáveis) pela qual se tem particular interesse em um dado projeto. Esse sinal é designado pela letra \mathbf{y} .

Referência é um sinal passado para o sistema com a pretensão de levá-lo a um estado desejado. Por exemplo, a velocidade de um carro depende da posição do pedal do acelerador, então essa posição é uma referência. É designada pela letra \mathbf{r} .

Entrada é o sinal que entra diretamente na planta, representado pela letra \mathbf{u} . É comumente formado pelo sinal de referência somado a um sinal de controle. O sinal de entrada define diretamente o que acontecerá com a planta, por isso está geralmente incluso nele a referência – que define a saída esperada, e o controle – que faz a saída não divergir da saída esperada na presença de distúrbios ou instabilidade na planta.

O **amortecimento** mede o quão difícil é alterar o estado de um sistema. Assim, quanto maior for o amortecimento do sistema, menos variação seu estado sofrerá para uma certa quantidade de energia aplicada a ele.

A **frequência natural** de um sistema é a frequência com que o seu sinal de saída tende a oscilar.

Overshoot é a ocorrência de um sinal de saída que ultrapassa a saída estacionária. Se ele ocorrer, ocorre sempre antes de o sistema estável atingir seu tempo de acomodação.

O **controlador** é um sistema projetado para ser acoplado a uma planta e é responsável por fazer medições e tomar decisões automatizadas para garantir que a saída da planta se comporte como se deseja. Ele faz isso modificando a entrada da planta com base no estado atual dela. Em projetos reais, ele pode ser um sistema mecânico, um circuito elétrico, um computador

ou processador dedicado, entre outras possibilidades.

Se a saída ou algum estado do sistema exercer alguma ação de controle sobre o sistema, diz-se que o sistema é de **malha fechada**, ou que ele é um **sistema com realimentação**. Caso contrário, ele é de **malha aberta**. Pode-se entender um sistema de malha fechada como aquele em que se verifica continuamente qual é o comportamento do sistema em relação ao comportamento esperado e toma-se decisões (como aumentar ou diminuir a entrada de acordo com um sinal de controle somado à referência) para que a saída tome o rumo certo (aumentar ou diminuir) de acordo com o que se deseja. Esse processo é automático e desempenhado pelo próprio controlador.

Um sistema é **invariante no tempo** se as matrizes de estado, de entrada e de saída forem constantes. Ser invariante no tempo é um indicativo de que as características da planta não mudam (pelo menos significativamente) durante suas atividades. Por exemplo, não é um sistema invariante no tempo uma espaçonave cuja perda de massa em função do gasto de combustível durante uma viagem seja de consideração fundamental para o sistema de controle.

Um sistema é **linear** se ele puder ser descrito por uma ou mais equações diferenciais lineares.

Um sistema é **contínuo** se seus sinais de entrada e de saída forem contínuos no tempo.

Referências

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Tradução de Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. ISBN 0471170526. Citado na página 63.
- BENNETT, S. A brief history of automatic control. **IEEE Control Systems**, v. 16, n. 3, p. 17–25, jun 1996. ISSN 1066033X. Citado na página 12.
- BISSELL, C. A history of automatic control. In: _____. **Springer handbook of automation**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 53–69. ISBN 9783540788317. Citado na página 12.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in System and Control Theory**. SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). Disponível em: <<http://web.stanford.edu/~boyd/lmibook/lmibook.pdf>>. Acesso em: 9 ago 2016. Citado nas páginas 13, 14 e 23.
- BURG, T. C. et al. Velocity tracking control for a separately excited DC motor without velocity measurements. In: **American Control Conference, 1994**. Baltimore, Maryland, Estados Unidos: IEEE, 1994. v. 1, p. 1051–1056 vol.1. Citado na página 55.
- CALAFIORE, G.; GHAOUI, L. Advent of convex programming. In: _____. **Optimization Models**. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2014. cap. 1.4.5, p. 18. ISBN 9781107050877. Citado na página 14.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 3, p. 358–367, mar 1996. ISSN 00189286. Citado nas páginas 26 e 27.
- GEROMEL, J.; KOROGUI, R. **Controle linear de sistemas dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios**. São Paulo, SP, Brasil: Blucher, 2011. ISBN 9788521205906. Citado nas páginas 22, 41 e 55.
- GU, K.; KHARITONOV, V.; CHEN, J. Polytopic uncertainty. In: _____. **Stability of time-delay systems**. Estados Unidos: Birkhäuser Boston, 2003. (Control Engineering), cap. 6.2.1, p. 198. ISBN 9781461200390. Citado na página 30.
- HOKAYEM, P. A.; GALLESTEY, E. **Lyapunov stability theory**. 2015. Disponível em: <http://people.ee.ethz.ch/~apnoco/Lectures2015/03_Lyapunov.pdf>. Acesso em: 20 ago 2016. Citado na página 24.
- HSIUNG, C.; MAO, G. Classification of real quadratic forms. In: _____. **Linear Algebra**. Singapura: World Scientific, 1998. cap. 4.2, p. 167. ISBN 9789810244095. Citado na página 22.
- JOHANSSON, M. Quadratic stability. In: _____. **Piecewise linear control systems: a computational approach**. Packard Building 243, 94305 Stanford, CA, Estados Unidos: Springer Berlin Heidelberg, 2003. (Lecture Notes in Control and Information Sciences), cap. 4.2, p. 42. ISBN 9783540368014. Citado na página 25.
- LIEN, C.-H. An efficient method to design robust observer-based control of uncertain linear systems. **Applied Mathematics and Computation**, Kaohsiung 840, Taiwan, ROC, n. 158, p. 29–44, out 2004. Citado na página 55.

- LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. **IEEE Transactions on Military Electronics**, v. 8, n. 2, p. 74–80, abr 1964. ISSN 05361559. Citado na página 13.
- LUENBERGER, D. G. Observers for multivariable systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 11, n. 2, p. 190–197, abr 1966. ISSN 00189286. Citado na página 13.
- LUENBERGER, D. G. An introduction to observers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 16, n. 6, p. 596–602, dez 1971. ISSN 00189286. Citado na página 13.
- LYAPUNOV, A. M. **Общая задача об устойчивости движения**. Tese de Doutorado — Universidade Estatal de São Petersburgo, 1892. Disponível em: <<http://www.vixri.ru/?p=3578>>. Acesso em: 11 ago 2016. Citado nas páginas 13 e 24.
- MACKENROTH, U. Rational transfer functions. In: _____. **Robust control systems: theory and case studies**. Mönkhofer Weg 136-140. Lübeck, Alemanha: Springer Berlin Heidelberg, 2004. cap. 2, p. 17–40. ISBN 9783662097755. Citado na página 20.
- MAZZINI, L. The separation principle. In: _____. **Flexible spacecraft dynamics, control and guidance: technologies by Giovanni Campolo**. Roma, Itália: Springer International Publishing, 2016. (Springer Aerospace Technology), cap. 5.2, p. 147. ISBN 9783319255408. Citado na página 33.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Tradução de Heloísa Coimbra de Souza. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2011. ISBN 9788576058106. Citado nas páginas 19, 31, 41 e 53.
- OLIVEIRA, M. C. de; FARIAS, D. P. de; GEROMEL, J. C. **LMISol user’s guide**. 1997. Citado na página 57.
- PIÑA, A. **Síntesis de sistemas de control borroso estables por diseño**. Tese de Doutorado — Universidade de Huelva, Huelva, Espanha, 2009. Citado na página 24.
- RADISAVLJEVIC-GAJIC, V. Full- and reduced-order linear observer implementations in Matlab/Simulink [lecture notes]. **IEEE Control Systems**, v. 35, n. 5, p. 91–101, out 2015. ISSN 1066033X. Citado na página 47.
- RAMPONI, F. **Notes on Lyapunov’s theorem**. 2010. Disponível em: <<http://control.ee.ethz.ch/~ifalst/docs/lyapunov.pdf>>. Acesso em: 23 nov 2015. Citado na página 24.
- ROSA FILHO, J. E. A. **Controle robusto H_2 aplicado ao pêndulo invertido sujeito a incertezas**. Dissertação de Mestrado — Universidade Estadual de Londrina, 2015. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/meel/disserta/2015_JULIO_ESTEFANO.pdf>. Acesso em: 4 out 2016. Citado na página 55.
- SAGNOL, G. **Semidefinite positive matrices and generalized inverses**. 2014. Disponível em: <<http://www.zib.de/sagnol/vorlesungen/optdes/SS14-OD-VL-02.pdf>>. Acesso em: 28 ago 2016. Citado na página 22.
- VINNICOMBE, G. **Stability and pole locations**. 2011. Disponível em: <<http://www-control.eng.cam.ac.uk/gv/p6/Handout3.pdf>>. Acesso em: 31 ago 2016. Citado na página 20.
- ZWICK, D. **Math 2270 – Lecture 32: Symmetric matrices**. 2012. Disponível em: <https://www.math.utah.edu/~zwick/Classes/Fall2012_2270/Lectures/Lecture32_with_Examples.pdf>. Acesso em: 24 jul 2016. Citado na página 63.

Índice

- alocação de polos, 26, 38
- amortecimento, 64
- autovalor / autovetor, 63
- controlador, 21, 64
- controle robusto, 29, 39
- diagrama de blocos, 59
- distúrbio, 64
- entrada, 64
- equações do espaço de estados, 18
- estabilidade, 18, 24
 - \mathcal{D} -estabilidade, 26, 38
 - assintótica, 18, 24, 37
 - critério, 20, 25
 - no sentido de Lyapunov, 24
 - robusta, 29, 39
- estado, 64
- estimação de estado, 31
- frequência natural, 64
- função de transferência, 20
- incertezas, 29, 39
- LMI, 22
 - códigos para resolução via LMISol, 60
- LMISol, 57
- Lyapunov
 - desigualdade de Lyapunov, 23
 - estabilidade no sentido de Lyapunov, 24
 - função quadrática de Lyapunov, 25
 - método direto de Lyapunov, 24
- malha aberta / malha fechada, 65
- matriz
 - adjunta, 63
 - de entrada, 18
 - de estado, 18
 - de saída, 18
 - estável, 21
 - positiva definida, 22
- modelagem de sistemas, 18
- observadores, 31
- overshoot, 64
- perturbação, 64
- planta, 64
- polo, 20
- princípio da separação, 33
- projeto
 - de controladores, 37
 - com \mathcal{D} -estabilidade, 38
 - com estabilidade assintótica, 37
 - com estabilidade robusta, 39
 - de observadores, 37
 - com \mathcal{D} -estabilidade, 39
 - com estabilidade assintótica, 38
 - exemplos, 41
- projeto de controle, 64
- realimentação de estado, 21, 65
- referência, 64
- região LMI, 27
- regime estacionário, 18
- ruído, 64
- saída, 64
- Scilab, 58
- sistema, 64
 - assintoticamente estável, 18
 - contínuo, 65
 - controlável, 53
 - estável, 18
 - instável, 18
 - invariante no tempo, 65
 - linear, 65
 - observável, 31, 53
- tempo de acomodação, 18, 20
- transformação de congruência, 23